FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2013/14
Sessione estiva - Primo appello
Lunedì 9 giugno 2014 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) Nell'urto perfettamente elastico si conservano energia cinetica e quantità di moto, per cui valgono le equazioni

$$MV_0 = MV_1 + mu_1, \qquad \frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}MV_1^2 + \frac{1}{2}mu_1^2,$$

da cui si ricava facilmente

$$V_1 = \frac{M-m}{M+m}V_0, \qquad u_1 = \frac{2M}{M+m}V_0,$$

ed è immediato verificare che vale sempre $u_1 > V_1$.

2) La massa M si muove di moto rettilineo uniforme, mentre la massa m si muove di moto armonico con frequenza $\omega \equiv K/m$. Vale quindi:

$$x_M(t) = V_1 t, \qquad x_m(t) = \frac{u_1}{\omega}\sin\omega t.$$

3) Affinché le masse possano nuovamente collidere occorre che le loro posizioni abbiano lo stesso valore nello stesso istante. L'equazione $x_M(t) = x_m(t)$, posto $z \equiv \omega t$, assume quindi la forma

$$(\frac{M}{m} - 1)z = 2\frac{M}{m}\sin z,$$

e la seconda collisione sarà possibile solo per valori di M/m tali per cui esista una soluzione reale di questa equazione.

4) Per valori grandi di M/m, come del resto intuitivo, esiste sempre una soluzione per l'equazione che rappresenta la seconda collisione, e al crescere del rapporto z decresce fino a un valore minimo $z_{min} = 1,8955..$ corrispondente al limite $M/m \to \infty$.

Viceversa per valori troppo piccoli di M/m non solo $V_1 < 0$, ma anche $V_1 < \dot{x}_m(t)$ per ogni valore di t. La possibilità di una seconda collisione richiede quindi, come caso limite, che siano simultanemente soddisfatte le equazioni

$$x_M = x_m, \qquad V_1 = \dot{x}_m,$$

ovvero, introducendo il valore limite z^*

$$(\frac{M}{m} - 1)z^* = 2\frac{M}{m}\sin z^*, \qquad (\frac{M}{m} - 1) = 2\frac{M}{m}\cos z^*.$$

Dividendo membro a membro le due equazioni si ricava la condizione $z^* = \tan z^*$, la cui soluzione è $z^* = 4,4934....$ Il minimo rapporto tra le masse si trova per sostituzione:

$$\frac{M}{m} \geq \frac{1}{1 - 2\cos z^*} = 0,6971...$$

Problema 2

1) Conviene innanzitutto calcolare la velocità v' del frammento come funzione dei parametri del problema. La velocità su un'orbita circolare è determinata dalla condizione di equilibrio dinamico

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2}$$

da cui si ricava immediatamente $v^2 = GM/R$ e di conseguenza $v' = \frac{1}{2}\sqrt{GM/R}$.

Osservando che la direzione del moto del frammento è inizialmente ortogonale al raggio possiamo quindi ricavare:

$$E' = \frac{1}{2}m'v'^2 - \frac{GMm'}{R} = -\frac{7}{8}\frac{GMm'}{R},$$

$$L' = m'v'R == \frac{1}{2}m'\sqrt{GMR}.$$

2) Esistono diversi modi di rispondere alla domanda. Il più semplice consiste nel notare che l'ortogonalità tra il raggio e la direzione iniziale del moto del frammento implica immediatamente che il punto in cui avviene la collisione è l'apogeo della nuova orbita del frammento, per cui si tratta soltanto di determinare il perigeo. Notando poi che vale sempre la relazione $E = -GMm/2a$ che lega il semiasse maggiore dell'orbita a all'energia meccanica totale E otteniamo subito in questo caso la condizione

$$2a' = \frac{8}{7}R = r_+ + r_-,$$

e di conseguenza

$$r_+ = R, \qquad r_- = \frac{1}{7}R.$$

In alternativa possiamo usare la formula che lega i valori dell'apogeo e del perigeo all'energia e al momento angolare:

$$r_\pm = \frac{L'^2/m'}{GMm' \mp \sqrt{(GMm')^2 + 2E'L'^2/m'}},$$

ottenendo in questo caso

$$r_\pm = \frac{R}{4 \mp 3}.$$

3) Il periodo T dell'orbita è legato al semiasse maggiore dalla terza legge di Keplero: $T = 2\pi\sqrt{a^3/GM}$, per cui nel caso specifico

$$T' = \frac{8}{7\sqrt{7}} 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 0,432...T_0,$$

dove abbiamo indicato con T_0 il periodo del satellite sull'orbita circolare.

Problema 3

1) Il passaggio di calore attraverso la parete conduttrice permette al sistema di raggiungere l'equilibrio termico alla temperatura finale T_f. Poiché il sistema è isolato l'energia interna totale deve conservarsi, e di conseguenza, essendo per un gas perfetto $U = n\,c_V T$, vale $n\,c_V(T_1 + T_2) = 2n\,c_V T_f$, da cui subito $T_f = (T_1 + T_2)/2$.

L'entropia è una funzione di stato, che nel caso dei gas perfetti dipende dalla temperatura e dal volume secondo la relazione $S = n\,c_V \ln T + nR \ln \frac{V}{n}$. Nel caso considerato il volume non cambia, e di conseguenza vale

$$\Delta S = n\,c_V \big(\ln \frac{T_1 + T_2}{2T_1} + \ln \frac{T_1 + T_2}{2T_2}\big).$$

2) La rimozione della parete permette al sistema di raggiungere l'equilibrio termico, con una temperatura finale che necessariamente coincide con la temperatura T_f determinata in precedenza. Poiché il volume molare V/n non cambia per effetto della rimozione della parete, troviamo nuovamente

$$\Delta S = n\,c_V \big(\ln \frac{T_1 + T_2}{2T_1} + \ln \frac{T_1 + T_2}{2T_2}\big).$$

3) Il sistema si trova inizialmente in una configurazione determinata dall'equilibrio meccanico, e quindi per l'equazione di stato dei gas perfetti, detta p_0 la pressione iniziale, deve valere $p_0 V_1 = n\,RT_1$ e $p_0 V_2 = n\,RT_2$, da cui subito $p_0 V = n\,R(T_1 + T_2)$, essendo V il volume totale del sistema. Possiamo quindi ricavare i volumi parziali iniziali

$$\frac{V_1}{V} = \frac{T_1}{T_1 + T_2}, \qquad \frac{V_2}{V} = \frac{T_2}{T_1 + T_2}.$$

Al termine del processo il sistema raggiunge anche l'equilibrio termico, alla temperatura T_f già determinata in precedenza, e di conseguenza poiché il numero di moli di gas è lo stesso nelle due parti e la pressione resta invariata, il volume di ciascuna delle due parti sarà alla fine esattamente metà del volume totale.

Possiamo quindi calcolare la variazione di entropia utilizzando la formula generale da cui si ottiene in questo caso

$$\Delta S = n\,c_V \big(\ln \frac{T_1 + T_2}{2T_1} + \ln \frac{T_1 + T_2}{2T_2}\big) + n\,R\big(\ln \frac{V}{2V_1} + \ln \frac{V}{2V_2}\big),$$

da cui sostituendo

$$\Delta S = n\,(c_V + R)\big(\ln \frac{T_1 + T_2}{2T_1} + \ln \frac{T_1 + T_2}{2T_2}\big) = n\,c_P \big(\ln \frac{T_1 + T_2}{2T_1} + \ln \frac{T_1 + T_2}{2T_2}\big),$$

risultato che si poteva facilmente ricavare anche dalla relazione (valida per i gas perfetti) $S = n\,c_P \ln T - n\,R \ln p$, notando che in questa trasformazione la pressione non cambia.

Ricordiamo che per il gas perfetto biatomico vale $C_V = \frac{5}{2}R$ e $C_P = \frac{7}{2}R$.