FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2013/14
Sessione estiva - Secondo appello
Lunedì 30 giugno 2014 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) e 2) La procedura per giungere alla soluzione è nei due casi uguale, facendo soltanto attenzione alla scelta del segno.

Notiamo che le due carrucole hanno sempre la stessa velocità angolare di rotazione, per cui le velocità delle due masse e le rispettive altezze saranno legate dalle relazioni

$$\frac{V}{R} = \mp\frac{v}{r}, \qquad \frac{X}{R} = \mp\frac{x}{r},$$

con il segno meno corrispondente a fili avvolti in senso opposto, e con la convenzione di misurare le altezze a partire dalla posizione in cui le masse sono alla stessa quota.

Possiamo quindi scrivere la conservazione dell'energia nella forma

$$E = \frac{1}{2}M\,V^2 + M\,g\,X + \frac{1}{2}m\,v^2 + m\,g\,x,$$

da cui subito

$$E = \frac{1}{2}\frac{V^2}{R^2}(M\,R^2 + m\,r^2) + g\frac{X}{R}(M\,R \mp m\,r).$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene quindi, dopo banali semplificazioni

$$(M\,R^2 + m\,r^2)A + (M\,R \mp m\,r)g\,R = 0,$$

dove A è l'accelerazione della massa M.

Otteniamo quindi la risposta nella forma

$$A = -\frac{M\,R \mp m\,r}{M\,R^2 + m\,r^2}g\,R, \qquad a = \mp\frac{r}{R}A.$$

3) Notiamo che l'accelerazione angolare della massa M vale, per il risultato precedente

$$\alpha = -\frac{M\,R \mp m\,r}{M\,R^2 + m\,r^2}g,$$

e quella della massa m vale $\mp\alpha$.

Il momento angolare totale del sistema, riferito all'asse delle carrucole, vale

$$L = M\,V\,R \mp m\,v\,r,$$

e di conseguenza otteniamo

$$\frac{dL}{dt} = M\,A\,R \mp m\,a\,r = -(M\,R^2 + m\,r^2)\alpha\,g = (M\,R \mp m\,r)g.$$

È immediato riconoscere che l'ultima espressione corrisponde esattamente in entrambi i casi al momento totale della forza di gravità.

Problema 2

1) Per ipotesi vale

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 = 0.$$

La forza totale cui è soggetta la massa m_1 è data da

$$\mathbf{F}_1 = G\,m_1\Big(\frac{m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{d^3} + \frac{m_3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{d^3}\Big) = -G\frac{M\,m_1}{d^3}\mathbf{r}_1,$$

dove abbiamo usato la relazione che definisce il centro di massa e la definizione di M.

Ripetendo il calcolo per le altre masse con opportune permutazioni si ottiene quindi la relazione generale

$$\mathbf{F}_i = -G\frac{M\,m_i}{d^3}\mathbf{r}_i,$$

che mostra che le forze totali agenti sulle tre masse sono tutte dirette verso il centro di massa del sistema.

2) Per le accelerazioni vale la relazione

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} = -\frac{G\,M}{d^3}\mathbf{r}_i,$$

quindi le accelerazioni sono indipendenti dalle masse individuali dei tre corpi (mentre dipendono dalla loro massa totale) e sono direttamente proporzionali alle distanze dei tre corpi dal centro di massa del sistema.

3) L'orbita circolare può essere mantenuta solo nel caso in cui la velocità angolare resti costante e l'accelerazione sia puramente centripeta. Questo può avvenire, nel caso in esame, solo se la configurazione non cambia, per cui la velocità angolare deve essere non soltanto costante ma anche comune alle tre masse. Ma notiamo che per accelerazione centripeta vale $\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r}$ e quindi nel nostro caso

$$\omega_i^2 = \frac{|\mathbf{a}_i|}{|\mathbf{r}_i|} = \frac{G\,M}{d^3}.$$

Di conseguenza, poiché il valore di ω è lo stesso per le tre masse, la soluzione ipotizzata può certamente esistere (in Astronomia si parla in questo caso di punti Lagrangiani).

Il periodo del moto risultante vale

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{G\,M}}.$$

Problema 3

1) La formula generale dell'entropia, nel caso di una singola mole di gas perfetto, può essere scritta nella forma $S = c_v \ln T + R \ln V$, dove abbiamo trascurato una costante, e ricordiamo che per il gas monoatomico $c_v = 3/2\, R$. Risulta quindi immediatamente

$$S_0 = c_v \ln T_0 + R \ln V_0, \qquad\qquad S_1 = c_v \ln T_1 + R \ln V_1$$

Il valore di K si ricava dalla linearità della relazione tra S e T, ottenendo

$$K = \frac{S_1 - S_0}{T_1 - T_0} = \frac{c_v \ln(T_1/T_0) + R \ln(V_1/V_0)}{T_1 - T_0}.$$

2) Dalla relazione valida per le adiabatiche reversibili (isoentropiche)

$$c_v \ln T_1 + R \ln V_1 = c_v \ln T_0 + R \ln V_2$$

si ricava immediatamente

$$V_2 = V_1 \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{c_v}{R}} = V_1 \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

3) Notiamo che il ciclo descritto si rappresenta nel piano (S, T) come un triangolo rettangolo la cui ipotenusa è costituita dalla trasformazione a), mentre la trasformazione b) è rappresentata da un cateto verticale e la trasformazione c) da un cateto orizzontale.

Inoltre per le trasformazioni reversibili vale la relazione $dQ = T\,dS$ e pertanto il calore scambiato in una trasformazione è semplicemente l'area sottostante la curva che rappresenta la trasformazione stessa nel piano (S, T).

Di conseguenza il calore assorbito è dato dall'area del trapezio rettangolo, il calore ceduto dall'area del rettangolo e il lavoro compiuto dall'area del triangolo. In formule quindi

$$Q_a = \frac{1}{2}(T_0 + T_1)(S_1 - S_0), \qquad\qquad Q_c = T_0(S_1 - S_0),$$

mentre il lavoro totale vale

$$W = Q_a - Q_c = \frac{1}{2}(T_1 - T_0)(S_1 - S_0).$$

4) Il rendimento è dato dalla formula

$$\rho \equiv \frac{W}{Q_a} = \frac{T_1 - T_0}{T_1 + T_0},$$

ed è indipendente dai volumi, come si voleva dimostrare.