FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2013/14
Sessione estiva - Terzo appello
Lunedì 21 luglio 2014 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) Notiamo innanzitutto che le componenti dei due versori in coordinate polari piane sono

$$\hat{\mathbf{r}} = (\cos\theta,\, \sin\theta), \qquad \hat{\theta} = (-\sin\theta,\, \cos\theta),$$

e di conseguenza vale

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{\theta}, \qquad \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{r}}.$$

Notiamo inoltre che nel caso in esame vale $\dot{\theta} = \omega$ e $\dot{r} = R\,\dot{\theta} = \omega R$.

Grazie a queste relazioni è immediato ricavare per il vettore velocità, essendo $\mathbf{r} = r\,\hat{\mathbf{r}}$:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} = \omega R\left[\hat{\mathbf{r}} + \omega\, t\,\hat{\theta}\right].$$

Ne segue subito per il modulo della velocità:

$$v(t) = \omega\, R\sqrt{1+\omega^2 t^2}.$$

2) Derivando l'espressione ottenuta per il vettore velocità si ottiene subito il vettore accelerazione nella forma

$$\mathbf{a} = \omega^2 R\left[2\,\hat{\theta} - \omega\, t\,\hat{\mathbf{r}}\right].$$

L'accelerazione tangenziale è la proiezione dell'accelerazione nella direzione della velocità. Risulta quindi:

$$\mathbf{a}_t \equiv \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{v^2}\mathbf{v} = \omega^2 R\frac{\omega\, t}{1+\omega^2 t^2}\left[\hat{\mathbf{r}} + \omega\, t\,\hat{\theta}\right].$$

Ne segue subito anche:

$$\mathbf{a}_c \equiv \mathbf{a} - \mathbf{a}_t = \omega^2 R\frac{2+\omega^2 t^2}{1+\omega^2 t^2}\left[\hat{\theta} - \omega\, t\,\hat{\mathbf{r}}\right], \qquad |\mathbf{a}_c| = \omega^2 R\frac{2+\omega^2 t^2}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}.$$

3) Dalla relazione $\rho|\mathbf{a}_c| = v^2$ e dai risultati precedenti segue immediatamente per il raggio istantaneo di curvatura della traiettoria

$$\rho = \frac{(1+\omega^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}{2+\omega^2 t^2}R,$$

che nel limite $t \to \infty$ tende a $R\,\omega\, t = R\,\theta = r(t)$.

Problema 2

1) Per la conservazione dell'energia nel punto più alto della circonferenza vale

$$\frac{1}{2} M\, v^2 = M\, g\, (h - 2\, R).$$

La forza centripeta in quel punto è diretta verso il basso ed è data dalla somma della forza di gravità e della reazione F della circonferenza sul corpo, che è uguale e opposta alla forza esercitata dal corpo sulla circonferenza:

$$\frac{M\, v^2}{R} = M\, g + F,$$

da cui subito, sostituendo

$$F = 2\, M\, g\Big(\frac{h}{R} - 2\Big) - M\, g = M\, g\Big(2\frac{h}{R} - 5\Big).$$

2) Per evitare il distacco occorre che la forza F sia positiva (altrimenti non ci sarebbe reazione della circonferenza sul corpo) e di conseguenza deve valere

$$h \geq \frac{5}{2} R.$$

3) Applicando anche in questo caso la conservazione dell'energia vale nel punto piu' basso della circonferenza

$$M\, g\, h = \frac{1}{2} M\, V^2,$$

e quindi nel caso indicato, essendo $h = \frac{5}{2} R$, risulta

$$V = \sqrt{5\, g\, R}.$$

Problema 3

1) L'entropia del gas perfetto è data dalla forma generale (a meno di una costante)

$$S_g = n\, c_v \ln T + n(c_p - c_v) \ln v,$$

dove $v \equiv V/n$ è il volume molare.

A questa va aggiunta l'entropia del corpo, che dipende soltanto dalla capacità termica e da T, perché il corpo non cambia il suo volume, e quindi vale semplicemente $S_c = C \ln T$:

$$S = S_g + S_c = (n\, c_v + C) \ln T + n(c_p - c_v) \ln v.$$

2) Le adiabatiche reversibili sono isoentropiche. Basterà quindi sostituire l'equazione dei gas perfetti $p\, v = R\, T$ nella relazione precedente per ottenere l'equazione delle adiabatiche nel caso in esame:

$$(n\, c_v + C) \ln p + (n\, c_p + C) \ln v = K,$$

dove K è una costante (direttamente legata all'entropia).