FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2013/14
Sessione autunnale - Primo appello
Lunedì 15 settembre 2014 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) Il corpo è soggetto alla forza di gravità e alla spinta idrostatica (principio di Archimede). Detto V il volume del corpo (che risulterà irrilevante ai fini della soluzione) la forza agente sullo stesso e diretta verso l'alto sarà quindi

$$F = \rho_L V\, g - \rho_C V\, g = \rho_c V\, a,$$

dove a è l'accelerazione cui è sottoposto il corpo finché si trova nel liquido, e vale quindi

$$a = \Big(\frac{\rho_L}{\rho_C} - 1\Big) g.$$

Per il teorema delle forze vive vale $a\, h = \frac{1}{2} v_0^2$ e di conseguenza il corpo uscirà dal liquido con velocità

$$v_0 = \sqrt{2\, g\, h}\Delta, \qquad \Delta \equiv \sqrt{\Big(\frac{\rho_L}{\rho_C} - 1\Big)}.$$

2) Applicando la conservazione dell'energia al moto del corpo dopo l'uscita dal liquido (e dividendo per la massa del corpo) si trova per l'altezza massima h_M la relazione

$$\frac{1}{2} v_0^2 + g\, h = g\, h_M,$$

da cui utilizzando il risultato precedente si ricava subito

$$\frac{\rho_L}{\rho_C} g\, h = g\, h_M, \qquad h_M = \frac{\rho_L}{\rho_C} h.$$

3) Il tempo totale T per il ritorno alla posizione di partenza è pari al doppio della somma del tempo t_1 di uscita dal liquido e del tempo t_2 di risalita da h a h_M.

Dalla cinematica si ricavano le relazioni

$$h = \frac{1}{2} a\, t_1^2, \qquad h_M - h = v_0 t_2 - \frac{1}{2} g\, t_2^2, \qquad v_0 - g\, t_2 = 0.$$

Otteniamo quindi facilmente

$$t_1 = \sqrt{\frac{2\, h}{g}} \frac{1}{\Delta}, \qquad t_2 = \sqrt{\frac{2\, h}{g}} \Delta,$$

e il tempo totale vale quindi

$$T = 2\sqrt{\frac{2\, h}{g}} \Big(\frac{1}{\Delta} + \Delta\Big) = 2\sqrt{\frac{2\, h}{g}} \frac{\rho_L}{\rho_C} \frac{1}{\Delta}.$$

Problema 2

1) La densità del corpo vale $(3/4\pi)M/R^3$ e di conseguenza la massa contenuta in una sfera di raggio r vale

$$m(r) = M\frac{r^3}{R^3}.$$

Applicando la legge di gravitazione universale si ottiene quindi per il modulo del campo gravitazionale allinterno del corpo

$$a_G = \frac{G\,m(r)}{r^2} \equiv \frac{G\,M}{R^3}r.$$

2) Notiamo che il risultato precedente può essere facilmente posto in forma vettoriale:

$$\mathbf{a}_G = -\Omega^2\mathbf{r}, \qquad\qquad \Omega \equiv \sqrt{\frac{G\,M}{R^3}},$$

da cui riconosciamo immediatamente che si tratta della legge del moto di un oscillatore armonico in tre dimensioni.

La componente della forza diretta lungo il tunnel è semplicemente la componente della forza ortogonale alla direzione del raggio che congiunge il centro del corpo con il centro del tunnel. Di conseguenza scomponendo il vettore $\mathbf{r}$ relativo a un punto del tunnel nelle sue componenti (x, d) si ricava immediatamente per laccelerazione lungo il tunnel la relazione

$$a_x = -\Omega^2 x.$$

3) Per quanto sopra dimostrato, il moto lungo il tunnel è semplicemente un moto armonico unidimensionale, il cui periodo T vale

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \equiv 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G\,M}}.$$

Si noti che il valore di T coincide con il periodo del moto orbitale di un corpo che percorra una circonferenza intorno al corpo a una distanza dal centro pari al raggio del corpo stesso, in quanto in questo caso $\omega^2 R = G\,M/R^2 = \Omega^2 R$.

Problema 3

1) Il calore assorbito dallla macchina termica è quello corrispondente ai tratti AB e DA del ciclo. Notando che $c_p = c_v + R$ e che per n moli di gas $pV = nRT$ si ottiene facilmente

$$Q_{AB} = \frac{f+2}{2} p_A \Delta V, \qquad Q_{DA} = \frac{f}{2} \Delta p \, V_A,$$

dove $\Delta V = V_C - V_A = 2\,V_A$ e $\Delta p = p_A - p_C = \frac{1}{2} p_A$.

Complessivamente vale quindi

$$Q_{ass} = Q_{AB} + Q_{DA} = \Big(\frac{5}{4} f + 2\Big) p_A V_A.$$

Il lavoro compiuto nel ciclo è semplicemente $L = \Delta p \, \Delta V = p_A V_A$. Ne segue subito

$$\eta \equiv \frac{L}{Q_{ass}} = \frac{4}{5\,f + 8} = \frac{2}{19},$$

da cui si ricava immediatamente

$$f = 6.$$

2) Il rendimento del ciclo di Carnot ipotizzato vale $\eta_c = 1 - \frac{T_D}{T_B}$.

Per le proprietà dei gas perfetti possiamo quindi ricavare

$$\eta_c = 1 - \frac{p_C V_A}{p_A V_C} = 1 - \big(\frac{1}{2}\big)\big(\frac{1}{3}\big) = \frac{5}{6}.$$