FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2014/15
Sessione estiva - Primo appello
Lunedì 15 giugno 2015 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) L'unica forza esterna attiva agente sul cavo è il peso della parte di cavo che ha superato il bordo del tavolo. Detta x la distanza verticale tra il bordo del tavolo e l'estremità del cavo che ha superato il bordo, la frazione di cavo su cui si esercita la forza peso è x/L. Adottando x come variabile dinamica, l'equazione del moto è quindi

$$M\,\ddot{x} = M\,g\,\frac{x}{L}.$$

2) Posto $\alpha = \sqrt{g/L}$ l'equazione del moto si riduce a:

$$\ddot{x} = \alpha^2 x.$$

La soluzione generale è quindi

$$x(t) = A\,\sinh(\alpha t) + B\,\cosh(\alpha t),$$

che nel caso particolare, imponendo le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, diventa

$$x(t) = \frac{v_0}{\alpha}\sinh(\alpha t), \qquad\qquad \dot{x}(t) = v_0\cosh(\alpha t).$$

Il tempo T necessario per la completa fuoriuscita del cavo dal tavolo è quindi determinato dall'equazione

$$\frac{v_0}{\alpha}\sinh(\alpha T) = L,$$

da cui si ricava immediatamente

$$T = \frac{1}{\alpha}\sinh^{-1}\frac{\alpha L}{v_0} \equiv \sqrt{\frac{L}{g}}\sinh^{-1}\frac{\sqrt{g\,L}}{v_0}.$$

3) La conservazione dell'energia si può ricavare facilmente integrando l'equazione del moto, per cui risulta

$$E \equiv \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}M\alpha^2 x^2 = \frac{1}{2}M\,v_0^2.$$

Problema 2

1) La condizione minima affinché il razzo non ricada a terra è che esso percorra un'orbita circolare di raggio R_T. L'equazione del moto per l'orbita circolare è

$$\frac{v_m^2}{R_T} = g \equiv \frac{G\,M_T}{R_T^2},$$

da cui subito

$$v_m = \sqrt{g\,R_T} \equiv \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T}}.$$

2) L'apogeo si trova sulla verticale degli antipodi del punto di partenza del razzo. La distanza dal centro della terra è determinata dalla conservazione dell'energia e del momento angolare, che nel caso specifico si riducono alle relazioni

$$\frac{1}{2}v_0^2 - v_m^2 = \frac{1}{2}v_A^2 - v_m^2\frac{R_T}{R_A},$$

$$v_0 R_T = v_A R_A,$$

dove abbiamo usato l'indice A per identificare i valori all'apogeo.

Effettuando le opportune sostituzioni e manipolazioni si ricava quindi

$$\frac{1}{2}v_0^2\left(1 - \frac{R_T^2}{R_A^2}\right) = v_m^2\left(1 - \frac{R_t}{R_A}\right),$$

da cui anche, dividendo per il fattore corrispondente alla soluzione banale

$$\frac{1}{2}v_0^2\left(1 + \frac{R_T}{R_A}\right) = v_m^2.$$

In conclusione otteniamo quindi il risultato

$$R_A = \frac{v_0^2}{2\,v_m^2 - v_0^2}R_T, \qquad v_A = \frac{2\,v_m^2 - v_0^2}{v_0},$$

e la distanza h dell'apogeo dal suolo vale

$$h \equiv R_A - R_T = 2\frac{v_0^2 - v_m^2}{2\,v_m^2 - v_0^2}R_T.$$

Si noti che il risultato è coerente con il fatto che per $v_0 = v_m$ deve risultare $h = 0$.

3) Il periodo dell'ordita circolare si ottiene dalla relazione

$$T_m = \frac{2\,\pi\,R_T}{v_m} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{g}}R_T^{\frac{1}{2}} \equiv \frac{2\,\pi}{\sqrt{G\,M_T}}R_T^{\frac{3}{2}}.$$

La terza legge di Keplero lega il periodo alla potenza 3/2 del semiasse maggiore, che in questo caso vale

$$\frac{1}{2}(R_T + R_A) = \frac{v_m^2}{2\,v_m^2 - v_0^2}R_T.$$

Di conseguenza è immediato ottenere

$$\frac{T_0}{T_m} = \left(2 - \frac{v_0^2}{v_m^2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Quando $\frac{v_0}{v_m} \to \sqrt{2}$ risulta $T_0 \to \infty$, quindi $v_0 = \sqrt{2\,gR_T}$ è la velocità di fuga.

Problema 3

1) Adottiamo come coordinate generalizzate le coordinate cilindriche ρ e φ, notando che sulla superficie del cono vale $z = \rho \cot\alpha$.

La Lagrangiana sarà allora semplicemente

$$Ł = \frac{1}{2} m\, \dot{\rho}^2 (1 + \cot^2 \alpha) + \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\varphi}^2 - m\, g\, \rho \cot\alpha,$$

e si osserva subito che φ è una coordinata ciclica.

In alternativa si può usare come variabile insieme con φ la distanza r dal vertice del cono, ottenendo

$$Ł = \frac{1}{2} m\, \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m\, r^2 \sin^2\alpha\, \dot{\varphi}^2 - m\, g\, r \cos\alpha,$$

2) Le equazioni del moto lagrangiane sono

$$\frac{m}{\sin^2\alpha} \ddot{\rho} = m\, \rho \dot{\varphi}^2 - m\, g\, \cot\alpha,$$

$$\frac{d}{dt}(m\, \rho^2 \dot{\varphi}) = 0.$$

La costante del moto associata alla simmetria assiale e alla coordinata ciclica è il momento angolare assiale

$$L = m \rho^2 \dot{\varphi},$$

per cui una sola equazione del moto è non banale, e può assumere la forma

$$\ddot{\rho} = \frac{L^2}{m^2} \frac{\sin^2\alpha}{\rho^3} - g\, \sin\alpha\, \cos\alpha.$$

3) La condizione che l'orbita sia circolare si riduce alla richiesta che ρ e $\dot{\varphi}$ siano costanti, e dal confronto con le equazioni del moto si riconosce che ciò accade quando è soddisfatta la condizione $\rho_0 \dot{\varphi}_0^2 = g\, \cot\alpha$, ovvero anche

$$\dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{g\, \cot\alpha}{\rho_0}}.$$

Si noti che la condizione di equilibrio dinamico (orbita circolare) è la stessa che si avrebbe per un pendolo sferico tangente alla superficie conica sospeso nel punto in cui le perpendicolari alla superficie che partono dalla circonferenza di raggio ρ_0 incontrano l'asse del cono.