FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2015/16
Sessione estiva - Primo appello
Lunedì 6 giugno 2016 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) L'equazione del moto, in forma vettoriale, è semplicemente

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - \frac{m}{\tau}\mathbf{v},$$

che, posto $\mathbf{v}_F \equiv \mathbf{g}\tau$, si semplifica ulteriormente a

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{v}_F - \mathbf{v}}{\tau}.$$

Questa equazione differenziale ordinaria del I ordine si risolve facilmente, per le condizioni iniziali date, ottenendo

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_F + \big(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_F\big)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Un'ulteriore semplice integrazione permette di ricavare

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_F t + \big(\mathbf{v}_F - \mathbf{v}_0\big)\tau\Big(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\Big).$$

2) Dalla soluzione dell'equazione del moto, considerando il limite $t \to \infty$, è immediato riconoscere che la velocità massima finale raggiungibile dal corpo è esattamente $|\mathbf{v}_F| \equiv g\tau$. Si noti che la velocità massima finale $g\tau$ può essere inferiore alla velocità iniziale v_0.

Per determinare la distanza orizzontale massima conviene decomporre il vettore $\mathbf{r}(t)$ nelle sue componenti cartesiane (x, y), ottenendo le relazioni

$$x - x_0 = v_0\tau\big(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\big),$$

$$y - y_0 = g\tau^2\big(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau}\big).$$

Ne segue subito che la massima distanza orizzontale che il corpo può percorrere è $v_0\tau$.

3) Notiamo che dai risultati precedenti si possono ricavare facilmente le relazioni

$$\xi = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$\eta = \big(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau}\big),$$

e dalla prima di queste relazioni si può ricavare t/τ come funzione di ξ:

$$\frac{t}{\tau} = -\ln(1 - \xi),$$

da cui sostituendo si ottiene per la traiettoria la relazione

$$\eta(\xi) = \xi + \ln(1 - \xi).$$

Problema 2

1) L'energia meccanica totale è data dalla somma di energia cinetica ed energia potenziale. Indicando con $\dot{x}$ la velocità (scalare) delle masse e del fluido in moto, l'energia cinetica è semplicemente

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \rho LS)\dot{x}^2.$$

Per il calcolo dell'energia potenziale bisogna invece tener conto della posizione del centro di massa di ciascuno dei due tratti di fluido, ottenendo quindi

$$V = m_1 gx + m_2 g(L - x) + \frac{1}{2}\rho g S x^2 + \frac{1}{2}\rho g S(L - x)^2.$$

In conclusione si ottiene quindi

$$E = K + V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \rho LS)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2 - \rho LS)gx + \rho g S x^2.$$

2) L'equazione del moto del fluido si otiene semplicemente derivando rispetto al tempo l'energia (conservata), per cui vale:

$$(m_1 + m_2 + \rho LS)\ddot{x} + 2\rho g S x + (m_1 - m_2 - \rho LS)g = 0.$$

La condizione di equilibrio è quindi

$$x_0 = \frac{L}{2} + \frac{m_2 - m_1}{2\rho S}, \qquad L - x_0 = \frac{L}{2} + \frac{m_1 - m_2}{2\rho S}.$$

3) Per determinare la frequenza delle piccole oscillazioni, poichè l'equazione del moto è già lineare nella variabile x, basterà considerare l'equazione per la variabile $\xi = x - x_0$ riconoscendo immediatamente che si riduce alla forma

$$\ddot{\xi} = -\omega^2 \xi,$$

dove vale

$$\omega^2 = \frac{2\rho g S}{m_1 + m_2 + \rho LS}.$$