**FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2016/17**
**Sessione estiva - Primo appello**
Giovedì 8 giugno 2017 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) Poiché la forza è costante e radiale l'energia potenziale dipende linearmente dalla distanza dal centro d'attrazione, e quindi è direttamente proporzionale alla distanza. Poiché l'energia potenziale è additiva le superficie equipotenziali nel caso indicato sono quindi il luogo dei punti tali che la somma delle loro distanze dai centri d'attrazione è costante. pertanto le superficie equipotenziali sono ellissoidi di rotazione, i cui fuochi si trovano nei centri d'attrazione.

2) Detta $\mathbf{r}$ la posizione di un punto materiale soggetto alle due forze, la risultante delle forze sarà necessariamente

$$\mathbf{F} = -F\Big(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{c}|} + \frac{\mathbf{r}+\mathbf{c}}{|\mathbf{r}+\mathbf{c}|}\Big),$$

mentre la superficie equipotenziale è definita dall'equazione

$$V(\mathbf{r}) = F\big(|\mathbf{r}-\mathbf{c}| \ + |\mathbf{r}+\mathbf{c}|\big) = K,$$

dove $K$ è una costante.

Se consideriamo una qualunque curva $\mathbf{r}(\lambda)$ vincolata a restare sulla superficie dell'elissoide possiamo derivare l'energia potenziale lungo la curva trovando

$$\frac{dV}{d\lambda} = F\Big(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{c}}{|\mathbf{r}-\mathbf{c}|} + \frac{\mathbf{r}+\mathbf{c}}{|\mathbf{r}+\mathbf{c}|}\Big)\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} = -\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} = 0,$$

quindi la forza è ortogonale alla tangente alla curva.

3) La forza sul piano di simmetria si ottiene facilmente notando che sul piano vale $\mathbf{r}\cdot\mathbf{c} = 0$, e di conseguenza

$$|\mathbf{r}-\mathbf{c}| = |\mathbf{r}+\mathbf{c}| = \sqrt{r^2+c^2},$$

da cui subito

$$\mathbf{F} = -2\,F\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{r^2+c^2}},$$

con il corretto comportamento asintotico per grande $r$.

Problema 2

Indichiamo con $S$, per tutti i casi in esame , la distanza tra i due centri d'attrazione gravitazionale, con $M$ ed $m$ rispettivamente le masse del più pesante e del più leggero dei due centri d'attrazione, con $R$ ed $r$ le rispettive distanze dal centro di massa, per cui $S = R + r$ e vale

$$R = \frac{m}{M+m} S, \qquad r = \frac{M}{M+m} S,$$

mentre il vettore congiungente $\mathbf{S}$ soddisfa l'equazione del moto

$$\ddot{\mathbf{S}} = -G \frac{M+m}{S^3} \mathbf{S}.$$

1) La condizione di equilibrio delle forze attrattive vale semplicemente

$$\frac{M}{(S - D_0)^2} = \frac{m}{D_0^2},$$

da cui, posto $\xi_0 \equiv D_0/S$, si ottiene subito

$$\frac{m}{M} = \frac{\xi_0^2}{(1-\xi_0)^2}, \qquad \xi_0 = \frac{\sqrt{m/M}}{1+\sqrt{m/M}}.$$

2) La condizione di moto circolare uniforme intorno al baricentro comporta una velocità angolare $\omega$ tale che

$$\omega^2 = G \frac{M+m}{S^3},$$

da cui si verifica facilemnte che sono soddisfatte le relazioni

$$\omega^2 R = G \frac{m}{S^2}, \qquad \omega^2 r = G \frac{M}{S^2}.$$

La condizione di equilibrio dinamico per un corpo posto lungo la retta congiungente può quindi essere scritta come una condizione di equilibrio tra le accelerazioni dovute alle forze gravitazionali e l'accelerazione centrifuga:

$$G \frac{M}{(S - D_1)^2} - G \frac{m}{D_1^2} = G \frac{M+m}{S^3} (r - D_1).$$

Ricordando il valore di $r$, semplici manipolazioni portano a

$$\frac{M}{(S - D_1)^2} - \frac{m}{D_1^2} = \frac{M}{S^2} - \frac{M+m}{S^3} D_1,$$

da cui anche la forma simmetrica

$$M\,(S - D_1) \Big[ \frac{1}{(S - D_1)^3} - \frac{1}{S^3} \Big] = m\, D_1 \Big[ \frac{1}{D_1^3} - \frac{1}{S^3} \Big].$$

Posto $\xi_1 \equiv D_1/S$ la relazione ottenuta può essere espressa nella forma

$$\frac{m}{M} = \frac{\xi_1^2}{(1-\xi_1)^2} \frac{1-(1-\xi_1)^3}{1-\xi_1^3}.$$

Assumendo che $m/M \ll 1$ possiamo assumere anche $\xi_1 \ll 1$, e di conseguenza semplificare la relazione precedente fino a ottenere

$$\frac{m}{M} \approx 3\,\xi_1^3, \qquad \xi_1 \approx \left(\frac{m}{3M}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Introducendo i valori numerici per i due casi in esame si ottiene quindi, per il sistema Terra-Luna

$$\xi_0 \approx 0,100, \qquad \xi_1 \approx 0,161$$

da cui

$$D_0 \approx 38.600\,Km, \qquad D_1 \approx 62.000\,Km,$$

e per il sistema Terra-Sole

$$\xi_0 \approx 0,00173, \qquad \xi_1 \approx 0,010,$$

da cui

$$D_0 \approx 266.000\,Km, \qquad D_1 \approx 1.540.000\,Km.$$

Notiamo che per il calcolo di $\xi_1$ nel caso Terra-Luna l'approssimazione usata è troppo rozza, e la soluzione numerica dell'equazione esatta, per il valore assegnato del rapporto tra le masse, è $\xi_1 \approx 0,1517$, da cui $D_1 \approx 58.250\,Km$.