FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2014/15
Sessione estiva - Secondo appello
Giovedì 16 luglio 2015 - ore 9

Problema 1

Un corpo di massa m, soggetto a un campo di gravità $\mathbf{g}$, è libero di muoversi lungo un filo inestensibile di lunghezza $2a$ i cui estremi sono vincolati a due punti posti alla stessa altezza e distanti $2c$ l'uno dall'altro. Sia $\mathbf{r} \equiv (x, y)$ la posizione istantanea del corpo e $\mathbf{v}$ la sua velocità, nel riferimento che ha come origine il punto medio tra i due punti si sospensione, a loro volta individuati dai vettori $\pm\mathbf{c}$.

1) Avendo definito le distanze l_+ e l_- del corpo dai punti di sospensione, dimostrare che la risultante delle tensioni risulta ortogonale alla direzione istantanea del moto del corpo. Si suggerisce di considerare la derivata rispetto al tempo della relazione $l_+ + l_- = 2a$ e di usare la notazione vettoriale.

2) Notando che il risultato precedente implica che il vincolo è olonomo, scrivere la Lagrangiana e l'energia del sistema utilizzando come coordinata generalizzata la variabile φ che soddisfa le relazioni $x = a\,\sin\varphi$ e $y = -b\,\cos\varphi$, dove $b^2 = a^2 - c^2$.

3) Ricavare l'equazione del moto dalla Lagrangiana e dalla legge di conservazione dell'energia, verificando la coerenza dei risultati ottenuti.

4) Approssimare l'equazione del moto nel regime di piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio e ricavare la frequenza delle oscillazioni. Verificare la coerenza del risultato nel limite $c \to 0$.

Problema 2

.

Un missile balistico è lanciato dal Polo Nord con velocità v diretta in nodo tale da formare un angolo θ con il piano orizzontale. Siano M e R la massa e il raggio della Terra, e si trascuri ogni effetto dovuto alla rotazione terrestre.

1) Scrivere le componenti orizzontale e verticale (rispetto al Polo) del vettore costante $\mathbf{N} \equiv G\,M\,\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{v} \wedge (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})$ associato al moto del missile.

2) Calcolare la distanza dal Polo Nord del punto di ricaduta del missile sulla Terra.

3) Approssimare la distanza dal Polo del punto di caduta nel limite in cui $v^2 R \ll GM$ e confrontare il risultato con il calcolo della gittata nel campo di gravità $\mathbf{g}$

4) Calcolare in funzione di θ e dei parametri terrestri il valore di v tale per cui il punto di caduta è il Polo Sud e determinare in questo caso posizione e altezza dell'apogeo.