FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2014/15
Sessione estiva - Primo appello
Giovedì 16 luglio 2015 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) Possiamo introdurre i vettori che rappresentano i segmenti orientati lungo i due tratti del filo dalla posizione del corpo ai punti di sospensione:

$$\mathbf{l}_\pm = -\mathbf{r} \mp \mathbf{c},$$

e notiamo che vale

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{d\mathbf{l}_\pm}{dt} = \mathbf{t}\,\dot{\varphi},$$

dove $\mathbf{t} \equiv (a\,\cos\varphi, b\,\sin\varphi)$ è un vettore tangente alla traiettoria e vale

$$\mathbf{t}^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi = l_+ l_-.$$

Notiamo ora che vale

$$\frac{d}{dt}(l_+ + l_-) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{l_+}\frac{dl_+^2}{dt} + \frac{1}{l_-}\frac{dl_-^2}{dt}\Big] = \frac{\mathbf{l}_+}{l_+}\cdot\frac{d\mathbf{l}_+}{dt} + \frac{\mathbf{l}_-}{l_-}\cdot\frac{d\mathbf{l}_-}{dt} = -\mathbf{n}\cdot\mathbf{t}\,\dot{\varphi} = 0,$$

dove

$$\mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{l}_+}{l_+} + \frac{\mathbf{l}_-}{l_-} = \frac{2\,b}{l_+ l_-}(-b\sin\varphi, a\cos\varphi)$$

è un vettore ortogonale alla traiettoria e vale $\mathbf{n}^2 = 4b^2/l_+l_-$.

Se il modulo della tensione del filo vale τ la risultante della composizione delle due tensioni sarà $\mathbf{T} = \tau\,\mathbf{n}$, e di conseguenza risulterà $\mathbf{T}\cdot\mathbf{t} = 0$ come si doveva dimostrare.

2) Notando che vale $v^2 = l_+ l_- \dot{\varphi}^2$ si ricava immediatamente

$$L = \frac{1}{2}m\,l_+ l_- \dot{\varphi}^2 + m\,g\,b\,\cos\varphi,$$

$$E = \frac{1}{2}m\,l_+ l_- \dot{\varphi}^2 - m\,g\,b\,\cos\varphi.$$

3) Applicando le equazioni di Eulero-Lagrange alla Lagrangiana L oppure annullando la derivata rispetto al tempo dell'energia E si ottiene la stessa equazione del moto

$$(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)\ddot{\varphi} - c^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + g\,b\,\sin\varphi = 0.$$

4) Nel regime di piccole oscillazioni, trascurando tutti i termini non lineari nell'equazione del moto, è immediato ricavare

$$a^2\ddot{\varphi} \approx -g\,b\,\varphi, \qquad\qquad \omega = \frac{\sqrt{g\,b}}{a} \to \sqrt{\frac{g}{a}} \quad se\ c \to 0.$$

Problema 2

1) Le componenti orizzontale e verticale del vettore di Lenz sono rispettivamente

$$N_x = v^2 R \sin\theta \cos\theta,$$

$$N_y = GM - v^2 R \cos^2\theta.$$

Di conseguenza l'inclinazione del vettore di Lenz rispetto alla verticale è data dall'angolo α tale che

$$\tan\alpha = \frac{N_x}{N_y} = \frac{v^2 R \sin\theta \cos\theta}{GM - v^2 R \cos^2\theta}.$$

2) Poiché la direzione del vettore di Lenz coincide con quella dell'apogeo, per simmetria l'angolo rispetto alla verticale percorso dal missile vale $2\,\alpha$, e di conseguenza la distanza dal Polo del punto di ricaduta sulla Terra vale

$$D = 2\,R\,\arctan\frac{v^2 R \sin\theta \cos\theta}{GM - v^2 R \cos^2\theta}.$$

3) Quando $v^2 R \ll GM$ si ottiene facilmente dal risultato precedente

$$D \approx 2\,R \frac{v^2 R\ sin\theta \cos\theta}{GM},$$

e poiché $GM \equiv g\,R^2$ ne segue subito che $D \approx \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$, che è il risultato noto per la gittata nel campo di gravità $\mathbf{g}$.

4) La condizione affinché il punto di ricaduta sia il Polo Sud coincide con la richiesta che l'apogeo si trovi sulla verticale dell'Equatore. Di conseguenza occorre che risulti $N_y = 0$, da cui la condizione sulla velocità

$$v_E^2 = \frac{GM}{R\cos^2\theta}.$$

In quest'ipotesi il valore delle costanti del moto (energia e momento angolare) è rispettivamente

$$E_E = \frac{1}{2}v_E^2 - \frac{GM}{R} = -\frac{1}{2}\frac{GM}{R}(1 - \tan^2\theta),$$

$$L_E = v_E R \cos\theta = \sqrt{GMR}.$$

L'espressione dell'apogeo in termini delle costanti del moto è in generale

$$r_E = -\frac{GM}{2\,E}\big(1 + \frac{N}{GM}\big),$$

dove $N^2 = 2\,E\,L^2 + (GM)^2$ è il modulo quadro del vettore di Lenz.

Notando che in questo caso $N = N_x = GM\tan\theta$ e sostituendo si ottiene quindi

$$r_E = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan^2\theta}R = \frac{R}{1 - \tan\theta},$$

$$h \equiv r_E - R = \frac{\tan\theta}{1 - \tan\theta}R.$$