FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2015/16
Sessione estiva - Secondo appello
Lunedì 27 giugno 2016 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) L'energia cinetica di un sistema di due particelle si decompone in generale secondo la formula

$$K = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 = \frac{1}{2}M\,U^2 + \frac{1}{2}\mu\,(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2,$$

dove $M = m_1 + m_2$ è la massa totale, $\mathbf{U} = (m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2)/M$ è la velocità del centro di massa e $\mu = m_1 m_2/M$ è la massa ridotta.

In un qualunque processo di collisione si conserva la quantità di moto totale $M\,\mathbf{U}$, quindi si conserva anche l'energia cinetica del centro di massa e può variare soltanto l'energia cinetica del moto relativo.

Nel caso in esame la velocità relativa iniziale è per ipotesi u_1, quindi risulta

$$\frac{1}{2}\mu\,u_1^2 = \frac{1}{2}\mu\,v_r^2 + \Delta E,$$

da cui subito

$$v_r^2 = u_1^2 - 2\frac{\Delta E}{\mu}.$$

2) La soglia corrisponde al caso in cui u_1 è minimo e quindi $v_r = 0$ (urto perfettamente anelastico) per cui vale

$$u_{1s}^2 = 2\frac{\Delta E}{\mu},$$

e di conseguenza per l'energia di soglia si ottiene

$$E_{1s} = \frac{m_1}{\mu}\Delta E = \big(1 + \frac{m_1}{m_2}\big)\Delta E.$$

Nel limite $m_1/m_2 \to 0$ risulta $E_{1s} \to \Delta E$, in quanto il sistema finale è fermo (urto contro un muro) e tutta l'enegia cinetica iniziale serve a superare la soglia, convertendosi in energia di eccitazione.

3) Nel riferimento del centro di massa vale $m_1\bar{\mathbf{u}}_1 + m_2\bar{\mathbf{u}}_2 = 0$ e di conseguenza la relazione $|\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2|^2 = 2\Delta E/\mu$ implica

$$\big(1 + \frac{m_1}{m_2}\big)\bar{u}_1 = \sqrt{\frac{2\Delta E}{\mu}}.$$

Ne consegue facilmente che

$$\bar{E}_1 = \frac{\mu}{m_1}\Delta E = \frac{m_2}{M}\Delta E, \qquad \bar{E}_2 = \frac{\mu}{m_2}\Delta E = \frac{m_1}{M}\Delta E,$$

e si verifica subito che $\bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \Delta E$.

Problema 2

1) Il momento coniugato alla coordinata generalizzata $\mathbf{r}$ è semplicemente

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{m_0 \mathbf{v}^2}{E_0}}}.$$

Di conseguenza l'equazione lagrangiana del moto prende la forma

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{m_0 \mathbf{v}^2}{E_0}}} \Big) = -\nabla V = \mathbf{F}.$$

2) Nel caso generale, esplicitando i calcoli, risulta

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{m_0 \mathbf{v}^2}{E_0}}} \Big(\mathbf{a} + \frac{m_0 \mathbf{v}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})}{E_0 - m_0 \mathbf{v}^2} \Big).$$

Di conseguenza se l'accelerazione è parallela alla velocità (moto unidimensionale) risulta

$$\frac{d\mathbf{p}_{\parallel}}{dt} = \frac{m_0 \mathbf{a}_{\parallel}}{\big(1 - \frac{m_0 \mathbf{v}^2}{E_0}\big)^{\frac{3}{2}}},$$

mentre se l'accelerazione è ortogonale alla velocità risulta

$$\frac{d\mathbf{p}_{\perp}}{dt} = \frac{m_0 \mathbf{a}_{\perp}}{\big(1 - \frac{m_0 \mathbf{v}^2}{E_0}\big)^{\frac{1}{2}}}.$$

3) Dai risultati precedenti si ricava facilmente che

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\big(1 - \frac{m_0 \mathbf{v}^2}{E_0}\big)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d}{dt}\Big[\frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{m_0 \mathbf{v}^2}{E_0}}} \Big].$$

Ricordando che $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\frac{dV}{dt}$ è immediato dimostrare la legge di conservazione proposta, che peraltro si poteva ricavare anche dalla conservazione di $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L$, a sua volta deducibile dall'indipendenza dal tempo della Lagrangiana.