

FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2016/17
Sessione estiva - Secondo appello
Giovedì 29 giugno 2017 - ore 9

Problema 1

Un corpo di massa m è vincolato a muoversi, senza attrito, sulla superficie di un paraboloide descritto dall'equazione $z = \frac{1}{2}a(x^2 + y^2)$, con $a > 0$. L'accelerazione di gravità è diretta lungo l'asse z (asse di simmetria del paraboloide), nel verso negativo dell'asse, e vale in modulo g .

- 1) Scrivere la Lagrangiana del sistema scegliendo opportune coordinate generalizzate.
- 2) Determinare la condizione di equilibrio dinamico per un assegnato valore L del momento angolare assiale.
- 3) Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno all'equilibrio dinamico.
- 4) (facoltativo) Considerare il caso $L = 0$ (moto limitato all'intersezione del paraboloide con un piano verticale passante per l'origine), mostrare che la frequenza delle piccole oscillazioni in questo caso è pari alla metà del valore che si otterrebbe come limite della risposta alla domanda 3) e spiegare perché ciò avviene.

Problema 2

Due pianeti si muovono su orbite circolari di raggio rispettivo R_1 ed R_2 intorno a una stella di massa M . Le masse dei pianeti sono trascurabili rispetto a M .

Un'astronave, accendendo brevemente i motori, parte dal primo pianeta nella direzione tangente all'orbita del pianeta stesso e dopo la partenza si muove soltanto per effetto della forza gravitazionale della stella, percorrendo così un'orbita ellittica che la porta sul secondo pianeta. All'arrivo la direzione dell'astronave è tangente all'orbita del secondo pianeta, e per fermarsi sul pianeta si dovranno nuovamente accendere i motori.

- 1) Calcolare, nel sistema di riferimento della stella, la velocità che l'astronave deve avere subito dopo la partenza e subito prima dell'arrivo. Esprimere i risultati in funzione dei parametri assegnati e della costante di gravitazione universale G .
- 2) Calcolare le velocità areolari dei due pianeti e la velocità areolare dell'astronave durante il proprio moto sull'orbita ellittica. Esprimere i risultati in funzione dei parametri assegnati e della costante di gravitazione universale G .
- 3) Calcolare le variazioni percentuali dell'energia cinetica dell'astronave $\Delta E/E$ alla partenza e all'arrivo per effetto dell'accensione dei motori. Esprimere i risultati esclusivamente in funzione del rapporto R_1/R_2 .