FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2016/17
Sessione estiva - Secondo appello
Giovedì 29 giugno 2017 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) data la simmetria cilindrica del sistema è naturale scegliere coordinate cilindriche $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\varphi = \arctan y/x$. La coordinata z resta determinata in funzione di r, pertanto soltanto r e φ sono coordinate generalizzate.

La Lagrangiana prende quindi la forma seguente:

$$Ł = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + a^2r^2\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2}m\,g\,a\,r^2,$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $\dot{z} = a\,r\,\dot{r}$.

2) I momenti coniugari sono:

$$p_r = m(1 + a^2r^2)\dot{r},$$

$$p_\varphi = m\,r^2\dot{\varphi} \equiv L,$$

dove L (momento angolare assiale) è una costante del moto in quanto φ è una coordinata ciclica in virtù della simmetria cilindrica del sistema.

L'equazione del moto esatta ha quindi la seguente forma:

$$m(1 + a^2r^2)\ddot{r} + 2\,m\,a^2r\,\dot{r}^2 = -m\,g\,a\,r + m\,r\,\dot{\varphi}^2 = -m\,g\,a\,r + \frac{L^2}{m\,r^3},$$

dove abbiamo usato la relazione $\dot{\varphi} = \frac{L}{m\,r^2}$.

All'equilibrio dinamico deve risultare $\ddot{r} = \dot{r} = 0$, e di conseguenza deve valere $\dot{\varphi}^2 = g\,a$, da cui sostituendo nella definizione di L si ricava il valore della coordinata radiale nella posizione di equilibrio dinamico per L fissato:

$$r_0^2 = \frac{L}{m\sqrt{ga}}, \qquad z_0 = \frac{L}{2m}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

3) L'equazione per le piccole oscillazioni si ottiene linearizzando l'equazione del moto intorno all'equilibrio. Posto $r = r_0 + \eta$ risulta

$$m(1 + a^2r_0^2)\ddot{\eta} = -m\,g\,a\,\eta - \frac{3\,L^2}{m\,r_0^4}\eta = -4\,m\,g\,a\,\eta,$$

da cui subito

$$\omega^2 = \frac{4\,g\,a}{1 + \frac{a^2 L}{m\sqrt{ga}}}.$$

4) Ponendo $L = 0$ direttamente nell'equazione del moto si trova che la posizione di equilibrio è $r_0 = 0$, come del resto intuitivo in quanto il sistema si riduce al moto in un potenziale simmetrico unidimensionale. L'equazione per le piccole oscillazioni è quindi semplicemente $m\,\ddot{\eta} = -m\,g\,a\,\eta$, e la frequenza delle piccole oscillazioni vale $\omega_0 = \sqrt{ga}$, mentre il limite della soluzione precedente per $L \to 0$ è $\omega \to 2\sqrt{ga}$.

La spiegazione dell'apparente incoerenza dei due risultati risiede nel fatto che, nel caso dell'oscillazione intorno all'equilibrio dinamico, per piccoli valori di L le orbite tendono a diventare ellissi e quindi partendo da un massimo dell'oscillazione il ritorno nello stesso punto dello spazio corrisponde a due oscillazioni in quanto anche il punto opposto dell'ellissi è un massimo dell'oscillazione. Questa spiegazione è resa più evidente dall'osservazione che per $L \to 0$ vale anche $\omega \to 2\,\dot{\varphi}$. Nel problema unidimensionale invece si ha un'oscillazione completa soltanto al momento del ritorno al punto di partenza. Stiamo quindi rispondendo a domande differenti.

Problema 2

1) Per definizione dalla condizione di tangenza all'orbita circolare sia alla partenza che all'arrivo discende il patto che partenza e arrivo devono essere afelio e perielio dell'orbita. Essendo noti R_1 e R_2 basterqùindi scrivere le leggi di conservazione dell'energia e del momento angolare per determinare i valori delle velocità subito dopo la partenza r subito prima dell'arrivo, che indicheremo con i simboli u_1 e u_2:

$$u_1 R_1 = u_2 R_2, \qquad u_1^2 - 2\frac{GM}{R_1} = u_2^2 - 2\frac{GM}{R_2}.$$

Le soluzioni di questo sistema sono:

$$u_1^2 = 2\frac{GM}{R_1 + R_2}\frac{R_2}{R_1}. \qquad u_2^2 = 2\frac{GM}{R_1 + R_2}\frac{R_1}{R_2}.$$

2) Le velocità areolari sono semplicemente la metà dei momenti angolari per unità di massa. Ricordando la relazione tra velocità e raggio nelle orbite circolari $v_i^2 = GM/R_i$ si ricava quindi per le velocità areolari A_i dei pianeti

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{2}\sqrt{GM\,R_1}, \qquad \dot{A}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{GM\,R_2},$$

mentre per l'astrovave vale la relazione

$$A_a = \frac{1}{2}u_1 R_1 = \frac{1}{2}u_2 R_2 = \sqrt{\frac{GM}{2}\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

3) Dai risultati precedenti è immediato ricavare le variazioni dei quadrati delle velocità alla partenza e all'arrivo:

$$u_1^2 - v_1^2 = \frac{GM}{R_1}\frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}, \qquad v_2^2 - u_2^2 = \frac{GM}{R_2}\frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}.$$

È quindi altrettanto immediato ricavare le variazioni percentuali dell'energia cinetica, dividendo rispettivamente per v_1^2 e per u_2^2:

$$\frac{\Delta E_1}{E_1} = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}, \qquad \frac{\Delta E_2}{E_2} = \frac{R_2 - R_1}{2\,R_1}.$$