FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2014/15
Sessione autunnale - Primo appello
Venerdì 4 settembre 2015 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) Se il piano è perfettamente liscio, il corpo cntinuerà a muoversi di moto rettilineo uniforme $x_C(t) = v\,t$, mentre l'estremità opposta del vagone seguirà la legge oraria $x_L(t) = L + v\,t - \frac{1}{2}t^2$ fino all'istante $t_f = \frac{v}{a}$ quando si fermerà nella posizione $x_f = L + \frac{v^2}{2\,a}$.

Con notazione adimensionale, posto $\lambda = \frac{2\,a\,L}{v^2}$, otteniamo quindi le leggi orarie

$$\xi_C(\tau) = 2\,\tau,$$
$$\xi_L(\tau) = \lambda + 2\,\tau - \tau^2, \qquad \tau_f = 1, \quad \xi_f = \lambda + 1.$$

Nel regime previsto dalla domanda il corpo raggiungerebbe il fondo del vagone quando $\xi_c = \xi_L$, ovvero al tempo $\tau_0 = \sqrt{\lambda}$ nella posizione $\xi_0 = 2\sqrt{\lambda}$. Di conseguenza la condizione $\tau_0 \leq \tau_f$ impone il vincolo $\lambda \leq 1$ ovvero

$$L \leq \frac{v^2}{2\,a}.$$

2) Se il treno è già fermo, ovvero quando $\lambda \geq 1$, il corpo raggiunge il fondo del vagone quando $\xi_C = \xi_f$, ovvero al tempo $\tau_0 = \frac{1}{2}(\lambda + 1)$, che corrisponde a

$$t_0 = \frac{L}{v} + \frac{v}{2\,a}, \qquad L \geq \frac{v^2}{2\,a}$$

3) Ripetendo le argomentazioni precedenti ma tenendo conto del fatto che ora il corpo è soggetto a una decelerazione che vale $\mu_c\,g$, otteniamo in questo caso le leggi orarie

$$\xi_C(\tau) = 2\,\tau - \epsilon\,\tau^2,$$
$$\xi_L(\tau) = \lambda + 2\,\tau - \tau^2, \qquad \tau_f = 1, \quad \xi_f = \lambda + 1.$$

Di conseguenza se il treno è ancora in movimento il corpo raggiunge il fondo del vagone al tempo $\tau_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{1-\epsilon}}$, per cui la condizione $\tau_0 \leq \tau_f$ impone il vincolo $\lambda \leq 1 - \epsilon$, ovvero

$$L \leq \frac{v^2}{2\,a}\big(1 - \frac{\mu_c g}{a}\big).$$

Se invece il treno è già fermo, la condizione $\xi_C = \xi_f$ determina in questo caso $\tau_0 = \frac{1}{\epsilon}\big(1 - \sqrt{1 - \epsilon - \epsilon\lambda}\big)$, da cui si ricava

$$t_0 = \frac{v}{\mu_c g}\Big(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_c g}{a} - \frac{2\,\mu_c g\,L}{v^2}}\Big).$$

Si noti che la richiesta di soluzioni reali impone in questo caso un ulteriore vincolo, per cui deve valere $1 - \epsilon \geq \epsilon\lambda$, alrimenti il corpo si ferma prima del fondo. per cui

$$\frac{v^2}{2\,a}\big(\frac{a}{\mu_c g} - 1\big) \geq L \geq \frac{v^2}{2\,a}\big(1 - \frac{\mu_c g}{a}\big).$$

Problema 2a

1) Imponendo la conservazione dell'energia si ottiene per la distanza massima R_M (che corrisponde alla condizione di velocità nulla) la relazione

$$\frac{1}{2} m\, V_0^2 - \frac{G\, M\, m}{R_0} = -\frac{G\, M\, m}{R_M},$$

da cui è immediato ricavare

$$R_M = \frac{2\, G\, M}{2\, G\, M - V_0^2 R_0}\, R_0.$$

È banale osservare che il risultato diverge quando $2\, G\, M = V_0^2 R_0$. Il problema quindi ha senso soltanto quando

$$V_0^2 < \frac{2\, G\, M}{R_0},$$

che è la condizione usuale affinché la velocità sia inferiore alla velocità di fuga.

2) La terza legge di Keplero ci fornisce una relazione tra il periodo e semiasse maggiore dell'orbita $T = 2\,\pi a^{\frac{3}{2}}/\sqrt{G\, M}$. In questo caso particolare l'orbita è degenere, in quanto consiste nel segmento di retta che va dal pianeta a R_M, con momento angolare nullo ed eccentricità $\epsilon = c/a = 1$. L'asse maggiore coincide quindi con R_M, e l'intervallo di tempo τ indicato nella domanda coincide con il semiperiodo. Risulta pertanto

$$\tau = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R_M^3}{2\, G\, M}}.$$

Questo risultato si poteva ottenere anche integrando (per R compreso tra 0 e R_M) l'equazione per $\dot{R}$ che si ricava dalla conservazione dell'energia.

Problema 2b

1) Dette z_1, z_2 e Z le altezze delle tre masse, il vincolo cinematico si può esprimere con la condizione che la somma $z_1+z_2+2\,Z$ sia costante. La Lagrangiana può quindi essere scritta nella forma

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} M \big(\frac{\dot{z}_1 + \dot{z}_2}{2}\big)^2 - m_1 g\, z_1 - m_2 g\, z_2 + M g \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Le equazioni del moto sono pertanto

$$m_1 \ddot{z}_1 + \frac{1}{4} M (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) = -m_1 g + \frac{1}{2} M\, g,$$

$$m_2 \ddot{z}_2 + \frac{1}{4} M (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) = -m_2 g + \frac{1}{2} M\, g.$$

Di conseguenza la condizione di equilibrio si riduce alle relazioni $M = 2\, m_1 = 2\, m_2$.

2) Combinando le equazioni del moto si ottiene facilmente

$$\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 2\, g \frac{M - 4\,\mu}{M + 4\,\mu}, \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Di conseguenza la massa centrale può restare in quiete se $M = 4\,\mu$.