FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2015/16
Sessione estiva - Terzo appello
Lunedì 18 luglio 2016 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) la legge del moto del centro di massa è la stessa prima e dopo la collisione, in quanto il sistema è isolato (almeno per quanto riguarda i gradi di libertà relativi al piano orizzontale). La posizione del c.m. all'istante $t = 0$ è

$$x(0) = \frac{m}{M+m}L, \qquad y(0) = 0,$$

e la velocità (costante) del c.m. vale

$$v_x = 0, \qquad v_y = \frac{m}{M+m}v.$$

Di conseguenza la legge oraria del moto del c.m. in componenti risulta essere:

$$x(t) = \frac{m}{M+m}L, \qquad y(t) = \frac{m}{M+m}v\,t.$$

2) In assenza di forze esterne, per un moto che si svolge sul piano orizzontale, il momento angolare è diretto lungo l'asse verticale z e le due componenti (momento angolare del centro di massa e momento angolare nel centro di massa) si conservano separatamente.

Il momento angolare del centro di massa si ricava dal moto del corpo m rispetto al c.m. e vale

$$J = \frac{m^2}{M+m}v\,L,$$

mentre il momento angolare nel c.m. si ricava utilizzando le espressioni della massa ridotta e della velocità relativa e vale

$$j = \mu\,v\,L = \frac{M\,m}{M+m}v\,L.$$

È immediato verificare che $J + j = m\,v\,L$, momento angolare totale, coincide con il momento angolare del corpo m rispetto all'origine.

3) Conviene calcolare il momento d'inerzia del sistema dei due corpi rispetto al c.m, che vale

$$I = M\big(\frac{m}{M+m}\big)^2 L^2 + m\big(\frac{M}{M+m}\big)^2 L^2 = \frac{M\,m}{M+m}L^2 = \mu\,L^2.$$

Dalla relazione $j - I\,\omega$ si ricava immediatamente

$$\omega = \frac{\mu\,v\,L}{\mu\,L^2} = \frac{v}{L}.$$

Problema 2

1) Considerando per semplicità un pendolo di massa unitaria, in quanto il risultato cinematico non dipende dalla massa, si ricava immediatamente, nelle ipotesi della domanda,

$$E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \omega^2 \cos\theta = \omega^2.$$

2) Nelle ipotesi previste si tratta di risolvere l'equazione differenziale

$$\dot{\theta} = \omega\sqrt{2(1-\cos\theta)} = 2\,\omega \sin\frac{\theta}{2},$$

con la condizione $\theta(0) = \pi$.

Con semplici sostituzioni si ricava la soluzione generale

$$\omega\, t = \ln\tan\frac{\theta}{4} + K,$$

dove K è una costante d'integrazione che per la condizione iniziale assegnata vale esattamente 0. Di consguenza la soluzione richiesta è

$$\theta(t) = 4 \arctan e^{\omega t}.$$

3) Posto $\theta = \pi/2$ si ricava il tempo iniziale $\omega t_- = \ln\tan\frac{\pi}{8} = \ln(\sqrt{2}-1)$ e analogamente posto $\theta = 3\pi/2$ si ottiene il tempo finale $\omega t_+ = \ln\tan\frac{3\pi}{8} = \ln(\sqrt{2}+1)$.

Notando che vale $t_- + t_+ = 0$ si ottiene immediatamente

$$\Delta t \equiv t_+ - t_- = 2\,t_+ = \frac{2}{\omega}\ln(\sqrt{2}+1).$$