FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2016/17
Sessione estiva - Terzo appello
Giovedì 20 luglio 2017 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) Affinché il corpo possa muoversi occorre che la forza della molla superi il massimo valore possibile per la forza di attrito statico; deve quindi valere

$$K\,D > \mu_s m\,g, \qquad\qquad D \geq \frac{\mu_s g}{\omega^2},$$

dove abbiamo posto come di consueto $\omega^2 = K/m$.

2) L'equazione del moto (partendo da posizioni sull'asse positivo delle ascisse) è

$$m\,\ddot{x} = -K\,x + \mu_c m\,g.$$

La soluzione con partenza da fermo è

$$x = \frac{\mu_c g}{\omega^2} + \big(D - \frac{\mu_c\,g}{\omega^2}\big)\cos\omega t,$$

e per raggiungere l'origine occorre che

$$\frac{\mu_c g}{\omega^2} - \big(D - \frac{\mu_c\,g}{\omega^2}\big) \leq 0, \qquad\qquad D \geq 2\frac{\mu_c g}{\omega^2}.$$

Pertanto, nel caso in cui valga

$$2\frac{\mu_c g}{\omega^2} > D > \frac{\mu_s g}{\omega^2},$$

il corpo si mette in movimento ma si arresta prima dell'origine, ed è facile convincersi che in questo caso dalla condizione $\mu_s > \mu_c$ consegue immediatamente che una volta fermo il corpo non può più ripartire.

3) In generale la legge oraria derivata al punto 2) implica che il corpo raggiunge velocità nulla nella posizione

$$x_1 = 2\frac{\mu_c g}{\omega^2} - D.$$

Nel caso in cui $x_1 < 0$ la forza nella posizione x_1 è positiva, ma se non supera il valore massimo per la forza di attrito statico il corpo resta fermo. pertanto se vale

$$K\,D - 2\,\mu_c m\,g < \mu_s m\,g,$$

ovvero se

$$2\frac{\mu_c g}{\omega^2} + \frac{\mu_s g}{\omega^2} \geq D > 2\frac{\mu_c g}{\omega^2}$$

il corpo supera l'origine ma poi quando la velocità si annulla resta fermo.

N.B. Se vale invece

$$4\frac{\mu_c g}{\omega^2} \geq D > 2\frac{\mu_c g}{\omega^2} + \frac{\mu_s g}{\omega^2}$$

il corpo riparte ma poi rimane fermo nella nuova posizione $x_2 = D - 4\frac{\mu_c g}{\omega^2}$ in cui la velocità si annulla, e così via.

Problema 2

1) Esiste un vettore di Lenz che in questo caso prende la forma

$$\mathbf{N} = K\,\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{L}.$$

Proiettando $\mathbf{N}$ nella direzione radiale si ottiene quindi

$$N\,r\,\cos\varphi = K\,r + \frac{L^2}{m},$$

da cui anche

$$r = \frac{p}{\epsilon\cos\varphi - 1},$$

dove abbiamo posto

$$p \equiv \frac{L^2}{K\,m}, \qquad \epsilon \equiv \frac{N}{K}.$$

Deve quindi necessariamente essere $\epsilon > 1$ per avere soluzioni fisiche ($r \geq 0$).

2) Mentre nel caso attrattivo risultava $\cos\varphi \leq 1/\epsilon$, nel caso repulsivo i valori accettabili soddisfano $\cos\varphi \geq 1/\epsilon$. In entrambi i casi la traiettoria è un'iperbole ma nel caso repulsivo il fuoco si trova dalla parte opposta rispetto al caso attrattivo.

La deviazione angolare asintotica vale

$$\Delta\varphi = 2\arccos\frac{1}{\epsilon}.$$

3) Notando che vale

$$N^2 = K^2 + 2\frac{K\,L^2}{m\,r} + v^2 L^2$$

ne segue

$$\frac{N^2 - K^2}{L^2} = 2\frac{E}{m}.$$

Dalle definizioni di p e di ϵ si ricava quindi

$$E = \frac{K}{2\,p}(\epsilon^2 - 1) > 0, \qquad L = \sqrt{K\,m\,p}.$$