FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2014/15
Sessione autunnale - Secondo appello
Giovedì 17 settembre 2015 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) Scegliamo l'origine delle coordinate polari sferiche al centro della base della semicupola. Per la conservazione dell'energia, finché il corpo rimane sulla superficie della cupola la sua velocità istantanea v si può ricavare in funzione di θ dalla relazione

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}v_0^2 + gR = \frac{1}{2}v^2 + gR\cos\theta,$$

e vale quindi

$$v^2 = v_0^2 + 2\,gR(1 - \cos\theta).$$

L'accelerazione centripeta richiesta affinché il corpo resti sulla superficie cresce al crescere di v^2, mentre la componente centripeta della gravità decresce al crescere di θ. la condizione per il distacco consiste quindi nella condizione di uguaglianza tra accelerazione centripeta e componente radiale dell'accelerazione di gravità:

$$\frac{v_1^2}{R} = g\,\cos\theta_1,$$

da cui, utilizzando i risultati precedenti, si ottiene facilmente la relazione

$$v_0^2 + 2\,gR(1 - cos\theta_1) = gR\cos\theta_1,$$

e ricordando che $v_0^2 = \alpha gR$ si ricava immediatamente

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{3}(\alpha + 2).$$

2) È banale ricavare, dalla relazione $v_1^2 = gR\cos\theta_1$, la risposta

$$v_1^2 = \frac{1}{3}(\alpha + 2)gR.$$

3) Per determinare D occorre scrivere la legge oraria del moto dopo il distacco, che in componenti cartesiane assume la forma

$$x(t) = R\sin\theta_1 + v_1\cos\theta_1 t,$$

$$y(t) + R\cos\theta_1 - v_1\sin\theta_1 t - \frac{1}{2}g\,t^2.$$

La posizione per cui $y = 0$ viene quindi raggiunta al tempo

$$t_0 = \frac{1}{g}\Big(\sqrt{v_1^2\sin^2\theta_1 + 2\,gR\cos\theta_1} - v_1\sin\theta_1\Big),$$

Sostituendo e semplificando si ottiene quindi

$$\frac{D}{R} = \sin\theta_1 + \cos^2\theta_1\big(\sqrt{\sin^2\theta_1 + 2} - \sin\theta_1\big) = \sin^3\theta_1 + \cos^2\theta_1\sqrt{2 + \sin^2\theta_1}.$$

Problema 2

1) L'unica variabile dinamica è l'angolo θ formato dal pendolo con la verticale, e pertanto la Lagrangiana vale

$$L = \frac{1}{2} m\, l^2 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) + m\, g\, l\, \cos\theta.$$

L'equazione del moto è pertanto

$$\ddot{\theta} = \Omega^2 \sin\theta \cos\theta - \Omega_p^2 \sin\theta,$$

dove abbiamo eliminato un fattore moltiplicativo $m\, l^2$ e abbiamo definito la frequenza di pendolo $\Omega_p^2 = g/l$.

2) La condizione per l'equilibrio si ottiene dall'annullarsi del lato destro dell'equazione del moto derivata in precedenza:

$$(\Omega^2 \cos\theta - \Omega_p^2) \sin\theta = 0.$$

Per $\Omega^2 \geq \Omega_p^2$ la soluzione è

$$\cos\theta_0 = \frac{\Omega_p^2}{\Omega^2}.$$

Viceversa per $\Omega^2 \leq \Omega_p^2$ la soluzione è semplicemente $\theta_0 = 0$.

3) La frequenza delle piccole oscillazioni si ottiene mediante la sostituzione $\theta = \theta_0 + \eta$ nell'equazione del moto e lo sviluppo al primo ordine in η.

Per $\Omega^2 \geq \Omega_p^2$ si ottiene l'equazione

$$\ddot{\eta} = -\Omega^2 \sin^2 \theta_0\, \eta,$$

da cui è immediato ricavare la frequenza delle piccole oscillazioni

$$\omega^2 = \Omega^2 - \frac{\Omega_p^4}{\Omega^2}.$$

Per $\Omega^2 \leq \Omega_p^2$ l'equazione risultante è invece

$$\ddot{\eta} = (\Omega^2 - \Omega_p^2)\eta,$$

e la frequenza delle piccole oscillazioni è

$$\omega^2 = \Omega_p^2 - \Omega^2.$$