FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2015/16
Sessione autunnale - Primo appello
Giovedì 1 settembre 2016 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) Le equazioni del moto si possono scrivere nella forma

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\Omega^2 m_1\mathbf{r}_1 - K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\Omega^2 m_2\mathbf{r}_2 - K(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

2) L'equazione del moto per il centro di massa si ottiene combinando opportunamente le equazioni precedenti:

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\Omega^2(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2).$$

Introducendo la variabile

$$\mathbf{R} \equiv \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

l'equazione per il moto del centro di massa diventa quindi semplicemente

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\Omega^2\mathbf{R},$$

ed è risolta, per le condizioni iniziali assegnate, da

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0\cos\Omega t + \frac{\mathbf{V}_0}{\Omega}\sin\Omega t.$$

3) L'equazione per il moto relativo si ottiene notando che

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\Omega^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \Big(\frac{K}{m_1} + \frac{K}{m_2}\Big)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

da cui introducendo la variabile $\mathbf{s} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ si ricava

$$\ddot{\mathbf{s}} = -(\Omega^2 + \omega^2)\mathbf{s},$$

dove abbiamo definito $\omega^2 \equiv K/\mu$, essendo μ la massa ridotta del sistema.

Per le condizioni iniziali asegnate risulta

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0\cos\sqrt{\Omega^2 + \omega^2}t + \frac{\mathbf{u}_0}{\sqrt{\Omega^2 + \omega^2}}\sin\sqrt{\Omega^2 + \omega^2}t.$$

Il moto risultante è la combionazione di un moto ellittico del centro di massa intorno all'origine con i moti ellittici dei due corpi intorno al loro centro di massa.

Problema 2

1) Assumiamo per la traiettoria la parametrizzazione

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\varphi}.$$

Notiamo poi che l'apogeo corrisponde al passaggio del missile sull'Equatore, e che all'apogeo vale

$$R + H = \frac{p}{1 - \epsilon},$$

mentre alla partenza vale $R = p$.

Di conseguenza si ricava facilmente

$$\epsilon = \frac{H}{R + H}.$$

2) L'asse maggiore è dato dalla somma di apogeo e perigeo, per cui detto a il semiasse maggiore vale

$$2\,a = \frac{p}{1 - \epsilon} + \frac{p}{1 + \epsilon} = \frac{2\,p}{1 - \epsilon^2} = 2\frac{(R + H)^2}{R + 2\,H},$$

e vale anche la formula alternativa

$$a = R + \frac{H^2}{R + 2\,H}.$$

3) Dai risultati precedenti è immediato ricavare il valore dell'energia totale:

$$E = -\frac{G\,M\,m}{2\,a} = -\frac{G\,M\,m}{2\,R}(1 - \epsilon^2).$$

Alla partenza vale quindi

$$\frac{1}{2} m\,v_0^2 - \frac{G\,M\,m}{R} = -\frac{G\,M\,m}{2\,R}(1 - \epsilon^2).$$

Con semplici manipolazioni, ricordando che $g = GM/R^2$, si ricava quindi

$$v_0^2 = \frac{G\,M}{R}(1 + \epsilon^2) = g\,R(1 + \epsilon^2),$$

ovvero

$$\frac{v_0^2}{g\,R} = 1 + \epsilon^2.$$