FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2016/17
Sessione autunnale - Primo appello
Giovedì 7 settembre 2017 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) L'equazione del moto del corpo è semplicemente

$$m\frac{dv}{dt} = -b\,v^2.$$

Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, che può subito essere integrata con la condizione iniziale assegnata sulla velocità, ottenendo

$$m\left[\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right] = b\,t,$$

da cui subito

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{b}{m}v_0 t}.$$

2) Il risultato precedente può essere scritto nela forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1 + \frac{b}{m}v_0 t},$$

che è di nuovo un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Per le assegnate condizioni iniziali la soluzione è

$$x(t) = \frac{m}{b}\ln\bigl(1 + \frac{b}{m}v_0 t\bigr).$$

3) È immediato invertire il risultato precedente ottenendo t come funzione di x. Sostituendo nel risultato ottenuto per $v(t)$ si ricava facilmente

$$v(x) = v_0 e^{-\frac{b}{m}x}.$$

Problema 2

1) Energia e momento angolare si conservano, quindi dalle loro definizioni si ottiene facilmente per ogni R

$$m\,V\,R\sin\theta = m\,v_0 d_0,$$

$$m\,V^2 - 2\frac{GMm}{R} = m\,v_0^2,$$

da cui risolvendo

$$V^2 = v_0^2 + 2\frac{GM}{R}, \qquad \sin\theta = \frac{v_0 d_0}{\sqrt{v_0^2 R^2 + 2\,GM\,R}}.$$

2) Alla minima distanza deve essere $\sin\theta = 1$, quindi

$$v_0^2 d_0^2 = v_0^2 R_m^2 + 2\,GM\,R_m,$$

da cui risolvendo

$$R_m = \sqrt{\left(\frac{GM}{v_0^2}\right)^2 + d_0^2} - \frac{GM}{v_0^2} \equiv \frac{p}{1+\epsilon}.$$

3) Ricordando che la norma del vettore di Lenz vale

$$N^2 = (GMm)^2 + 2\frac{E}{m}L^2$$

per l'eccentricità si ottiene

$$\epsilon^2 = \left(\frac{N}{GMm}\right)^2 = 1 + 2\frac{E}{m}\frac{L^2}{(GMm)^2} = 1 + \frac{v_0^4 d_0^2}{(GM)^2}.$$

Per completezza notiamo anche che vale

$$p = \frac{L^2}{GMm^2} = \frac{v_0^2 d_0^2}{GM}, \qquad \epsilon^2 - 1 = \frac{2\,p\,E}{GMm}.$$