FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2014/15
Sessione invernale - Primo appello
Venerdì 29 gennaio 2016 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) Possiamo rappresentare il vettore posizione $\mathbf{r}$ della massa prima del distacco con le sue componenti sul piano verticale:

$$\mathbf{r} \equiv \Big(x,\, R - R\,\cosh\big(\frac{x}{R}\big)\Big),$$

e calcolare le componenti della velocità in funzione di $\dot{x}$, derivata di x rispetto al tempo:

$$\mathbf{v} = \Big(1,\, -\sinh\big(\frac{x}{R}\big)\Big)\,\dot{x} \equiv \cosh\big(\frac{x}{R}\big)\,\dot{x}\,\hat{\mathbf{t}},$$

dove per definizione, essendo $v \equiv |\mathbf{v}| = \cosh\big(\frac{x}{R}\big)\,\dot{x}$,

$$\hat{\mathbf{t}} = \Big(\frac{1}{\cosh\big(\frac{x}{R}\big)},\, -\tanh\big(\frac{x}{R}\big)\Big)$$

è il versore tangente alla traiettoria.

È quindi immediato ricavare per il versore $\hat{\mathbf{n}}$ normale alla traiettoria la relazione

$$\hat{\mathbf{n}} = \Big(\tanh\big(\frac{x}{R}\big),\, \frac{1}{\cosh\big(\frac{x}{R}\big)}\Big).$$

2) La condizione di non distacco si può tradurre in un vincolo sulla componente normale dell'accelerazione, che essendo dovuta alla gravità non può superarne il valore in modulo, per cui, per cui essendo

$$\mathbf{a} = \cosh\big(\frac{x}{R}\big)\,\Big(\ddot{x}\hat{\mathbf{t}} + \frac{\dot{x}^2}{R}\hat{\mathbf{g}}\Big),$$

dove $\hat{\mathbf{g}}$ è il versore (verticale) diretto come l'accelerazione di gravità $\mathbf{g}$, deve valere la condizione

$$|\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{g}| \geq |\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{a}|,$$

che si traduce immediatamente nella condizione

$$g \geq \frac{\dot{x}^2}{R}\cosh\big(\frac{x}{R}\big) \equiv \frac{v^2}{R\,\cosh\big(\frac{x}{R}\big)}.$$

Poiché in ogni istante deve valere la conservazione dell'energia

$$v^2 = v_0^2 + 2\,g\,R\Big(\cosh\big(\frac{x}{R}\big) - 1\Big),$$

è immediato ricavare dalla condizione iniziale $v_0^2 = \alpha\, g\, R$ la disuguaglianza nella forma:

$$\cosh\Big(\frac{x}{R}\Big) \leq 2-\alpha.$$

La condizione di distacco si deriva immediatamente dalla saturazione del vincolo, per cui al distacco risulta, sostituendo nella definizione di $\mathbf{r}$,

$$\frac{x_D}{R} = \cosh^{-1}(2-\alpha), \qquad\qquad \frac{y_D}{R} = \alpha - 1.$$

3) Sostituendo nell'equazione di conservazione dell'energia il risultato precedente per la posizione al momento del distacco si ricava il modulo della velocità al momento del distacco:

$$v_D^2 = g\, R\, (2-\alpha),$$

e le componenti del versore tangente al momento del distacco:

$$\hat{\mathbf{t}}_D = \Big(\frac{1}{2-\alpha}, -\frac{\sqrt{(3-\alpha)((1-\alpha)}}{2-\alpha}\Big).$$

Di conseguenza il vettore velocità al momento del distacco vale in componenti

$$\mathbf{v}_D = \Big(\sqrt{\frac{g\, R}{2-\alpha}}, -\sqrt{\frac{(3-\alpha)(1-\alpha) g\, R}{2-\alpha}}\Big).$$

Problema 2

1) Il momento d'inerzia di un cilindro cavo si ottiene dall'applicazione diretta della definizione, notando che il volume è dato dalla relazione

$$V = H \int_r^R 2\,\pi\, x\, dx = \pi\, (R^2 - r^2).$$

Di conseguenza il momento d'inerzia è

$$I_C = \frac{M}{V} H \int_r^R 2\,\pi\, x^3 dx = \frac{M}{2}\frac{R^4 - r^4}{R^2 - r^2} = \frac{M}{2}(R^2 + r^2).$$

2) L'equazione del moto del pendolo di torsione, date le definizioni indicate nel testo, è semplicemente

$$I_C\, \ddot{\theta} = -K\, \theta,$$

e quindi, per la condizione iniziale assegnata, e posto $\omega \equiv \sqrt{\frac{K}{I_C}}$, la soluzione è

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t,$$

3) Nel calcolo si deve tener conto del fatto che ora la distanza di ogni punto della sfera dall'asse è data da $x = \sqrt{R^2 - z^2}$, dove z (coordinata verticale) è la variabile d'integrazione, mentre $V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$. Vale quindi

$$I_S = \frac{M}{V}\pi\Big[\int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2 dz - \int_{-r}^{r} (r^2 - z^2)^2 dz\Big] = \frac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

La soluzione dell'equazione del moto è la stessa trovata per la domanda precedente, salvo la sostituzione $I_C \to I_S$.