FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2015/16
Sessione invernale - Primo appello
Lunedì 23 gennaio 2017 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) Adottiamo la seguente notazione: sia $\mathbf{R}$ il vettore giacente sul piano del moto e congiungente l'asse di rotazione con il punto di contatto istantaneo del filo con il cilindro, sia $\mathbf{l}$ il vettore che congiunge il punto di contatto istantaneo con la massa im movimento, sia $\hat{\mathbf{r}}$ il versore diretto come $\mathbf{R}$ e sia $\hat{\theta}$ il versore diretto come $\mathbf{l}$.

Risultano pertanto valide le seguenti relazioni:

$$\mathbf{R} = R\hat{\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{l} = l\hat{\theta}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{l},$$

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \dot{\theta}\hat{\theta}, \qquad \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}}, \qquad \dot{l} = -\dot{\theta}R.$$

dove $\mathbf{r}$ è la posizione istantanea del corpo rispetto all'asse di rotazione e $l(\theta) = l_0 - R\theta$.

Risulta quindi immediato ricavare per la velocità e l'accelerazione della massa in moto le relazioni (in cui $l \equiv l(\theta)$):

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{l}} = -l\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}},$$

$$\mathbf{a} = (R\dot{\theta}^2 - l\ddot{\theta})\hat{\mathbf{r}} - l\dot{\theta}^2\hat{\theta}.$$

2) Notiamo che l'accelerazione di gravità $\mathbf{g}$ può essere decomposta lungo i due versori mediante la formula $\mathbf{g} = g\,\sin\theta\hat{\mathbf{r}} + g\,\cos\theta\hat{\theta}$.

La legge di conservazione dell'energia è quindi semplicemente

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - m\mathbf{g}\cdot\mathbf{r} = m\big[\frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2 - g(R\sin\theta + l\cos\theta)\big].$$

Nelle ipotesi del problema vale

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgl_0 = 0, \qquad \textit{da cui} \qquad l\dot{\theta}^2 = 2g(\frac{R}{l}\sin\theta + cos\theta).$$

Derivando l'equazione dell'energia e dividendo per un fattore $ml\dot{\theta}$, supposto in generale non nullo, si ottiene facilmente

$$0 = -R\dot{\theta}^2 + l\ddot{\theta} + g\,\sin\theta,$$

che poteva essere ricavata direttamente derivando l'espressione vettoriale dell'energia e ottenendo $0 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{r}\cdot\mathbf{v}$. La relazione

$$R\dot{\theta}^2 - l\ddot{\theta} = g\,\sin\theta$$

è appunto la legge del moto per la componente tangenziale dell'accelerazione $\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{g}\cdot\hat{\mathbf{r}}$.

3) Notiamo che l'accelerazione totale istantanea è legata alla tensione (per unità di massa) τ dalla relazione $\mathbf{a} = \mathbf{g} + \tau$. Ricordiamo che deve essere $\tau = -\tau\hat{\theta}$ in quanto la tensione è sempre diretta lungo il filo nel verso opposto a $\mathbf{l}$.

Considerando la sola componente trasversale dell'equazione per l'accelerazione si ottiene quindi

$$-l\,\dot{\theta}^2 = g\,\cos\theta - \tau,$$

da cui subito, utilizzando la legge di conservazione dell'energia si ottiene in questo caso, per $E = 0$

$$T \equiv m\tau = 2mg\frac{R}{l}\sin\theta + 3mg\cos\theta.$$

Problema 2

1) La relazione che lega la distanza percorsa all'angolo iniziale θ si ottiene notando che la distanza è legata al doppio dell'angolo ψ formato dal vettore di Lenz con la verticale del punto di lancio. Poiché per il momento angolare (per unità di massa) vale la relazione $L = vR\cos\theta$, le componenti del vettore di Lenz (per unità di massa) sono

$$v^2R\sin\theta\cos\theta, \qquad GM - v^2R\cos^2\theta,$$

e vale quindi

$$\tan\psi = \frac{v^2R\sin\theta\cos\theta}{GM - v^2R\cos^2\theta}.$$

Ponendo, come indicato, $\alpha \equiv v^2R/GM \equiv v^2/gR$ si ottiene quindi

$$\tan\psi = \frac{\alpha\sin\theta\cos\theta}{1 - \alpha\cos^2\theta}.$$

Massimizzando $\tan\psi$ si trova la condizione

$$\cos 2\theta_M = \frac{\alpha}{2-\alpha}, \qquad \textit{da cui} \qquad \tan\psi_M = \frac{\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}}, \qquad \sin\psi_M = \frac{\alpha}{2-\alpha},$$

e vale la pena di notare che $\psi_M + 2\theta_M = \frac{\pi}{2}$.

2) In conclusione vale quindi

$$D = 2R\arcsin\frac{\alpha}{2-\alpha}.$$

3) Notiamo che nel limite $\alpha \to 0$ vale $\psi_M \to 0$ e di conseguenza anche

$$\theta_M \to \frac{\pi}{4}, \qquad D \to \alpha R = \frac{v^2}{g},$$

e questi sono esattamente i risultati che si sarebbero ottenuti per la gittata massima dalla formula della gittata.