FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2014/15
Sessione invernale - Secondo appello
Venerdì 19 febbraio 2016 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) L'equazione del moto per la particella i-esima si ottiene semplicemente (dividendo per la massa della particella stessa) nella forma

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = K \sum_{j\neq i} m_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = K \sum_{j\neq i} m_j \mathbf{r}_j - K\,(\sum_{j\neq i} m_j)\,\mathbf{r}_i.$$

2) Nel riferimento del centro di massa vale

$$\sum_{j\neq i} m_j \mathbf{r}_j = -m_i \mathbf{r}_i,$$

e di conseguenza l'equazione del moto per la particella i-esima diventa

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -KM\,\mathbf{r}_i,$$

dove $M = \sum_j m_j$ è la massa totale del sistema.

Si noti che l'equazione ottenuta è quella di un oscillatore armonico isotropo in tre dimensioni con frequenza $\Omega^2 = KM$.

3) L'energia potenziale totale del sistema, rappresentata come somma di termini dovuti alle interazioni binarie, vale

$$V(\{\mathbf{r}_j\}) = \frac{1}{2} K \sum_{i<j} m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2.$$

Con semplici manipolazioni si ottiene da questa espressione la forma alternativa

$$V(\{\mathbf{r}_j\}) = \frac{1}{2} K\,[\sum_i m_i \sum_j m_j \mathbf{r}_j^2 - (\sum_i m_i \mathbf{r}_i)^2].$$

Come abbiamo già notato il secondo termine si annulla nel riferimento del centro di massa, nel quale vale pertanto

$$V(\{\mathbf{r}_j\}) = \frac{1}{2} KM \sum_j m_j r_j^2,$$

come del resto ci si poteva aspettare dalle equazioni del moto.

Problema 2

1) La curva che in ogni punto è ortogonale alla risultante tra accelerazione centrifuga e gravità, nel caso di velocità angolare costante, risolve l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g},$$

e pertanto vale semplicemente

$$y(x) = \frac{1}{2\,g}\omega^2 x^2 + y_0,$$

dove y_0 rappresenta la coordinata (misurata a partire dalla base del secchio) del punto più basso della superficie di rotazione.

2) La quantità da calcolare è $h - y_0$, e può essere ricavata imponendo la conservazione del volume del liquido. Deve infatti valere

$$2\pi \int_0^R y(x)\,x\,dx = \pi\,R^2 h,$$

e poiché risulta

$$2\pi \int_0^R \big(y_0 + \frac{1}{2\,g}\omega^2 x^2\big)\,x\,dx = \pi\,R^2 y_0 + \frac{1}{4\,g}\pi\,\omega^2 R^4,$$

ne segue immediatamente

$$y_0 = h - \frac{1}{4\,g}\omega^2 R^2, \qquad\qquad h - y_0 = \frac{1}{4\,g}\omega^2 R^2.$$

3) Il momento d'inerzia del liquido si ottiene dalla relazione

$$I = 2\pi\rho \int_0^R y(x)\,x^3 dx = \frac{1}{2}\pi\rho\,R^4\big(h + \frac{1}{12\,g}\omega^2 R^2\big),$$

dove ρ è la densità del liquido.

Ricordando che la massa del liquido vale

$$M = \pi\rho\,R^2 h$$

il risultato può essere riscritto nella forma

$$I = \frac{1}{2}MR^2\big(1 + \frac{\omega^2 R^2}{12\,gh}\big) = I_0\,\big(1 + \frac{\omega^2 R^2}{12\,gh}\big),$$

che è evidentemente coerente con il limite $\omega \to 0$.