**FISICA I per Matematica- Prova scritta - A.A. 2015/16**
**Sessione invernale - Secondo appello**
Lunedì 20 febbraio 2017 - ore 9

SOLUZIONI

Problema 1

1) Posto $l(\theta) \equiv l_0 - R\,\theta$ (lunghezza istantanea del filo), l'equazione del moto si può dedurre direttamente dalla legge di conservazione dell'energia, che in assenza di forze esterne prende in questo caso la forma

$$E = \frac{1}{2} m\,\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}\big(l(\theta)\dot{\theta}\big)^2,$$

in quanto la velocità, diretta istantaneamente nella direzione ortogonale a quella del filo, ha modulo $l(\theta)\dot{\theta}$.

Dalla conservazione dell'energia discende la relazione $l(\theta)\dot{\theta} = v_0$, derivando la quale si ottiene subito la legge del moto

$$l(\theta)\ddot{\theta} - R\,\dot{\theta}^2 = 0.$$

Integrando $(l_0 - R\,\theta)d\theta = v_0\,dt$ si ottiene invece facilmente la legge oraria del moto:

$$R\,\theta(t) = l_0 - \sqrt{l_0^2 - 2\,R\,v_0 t},$$

da cui anche la relazione

$$l(t) = \sqrt{l_0^2 - 2\,R\,v_0 t}.$$

Il tempo impiegato dal corpo per giungere a contatto con il cilindro è quindi

$$T = \frac{l_0^2}{2\,R\,v_0}.$$

2) La tensione del filo si ricava uguagliandola alla forza centripeta istantanea:

$$\tau = m\,l(t)\,\dot{\theta}^2 = \frac{m\,v_0^2}{l(t)} = \frac{m\,v_0^2}{\sqrt{l_0^2 - 2\,R\,v_0 t}}.$$

3) Se il corpo parte nella direzione opposta a quella di avvolgimento, esso deve percorrere un semicerchio di raggio $l_0$ prima di giungere nella posizione a partire dalla quale potrà avvolgersi (nel verso opposto al precedente).

La lunghezza dellarco percorso è quindi $\pi\,l_0$, mentre la velocità (costante) con cui è percorso vale $v_0$. Di conseguenza il tempo di percorrenza dellarco è $\pi\,l_0/v_0$.

La risposta alla domanda è quindi

$$T = \frac{\pi\,l_0}{v_0}\Big[1 + \frac{l_0}{2\,\pi\,R}\Big]$$

La tensione nella fase che precede l'avvolgimento vale

$$\tau_0 = \frac{m\, v_0^2}{l_0},$$

mentre nel corso dell'avvolgimento vale

$$\tau = \frac{m\, v_0^2}{\sqrt{l_0^2 + 2\,\pi\, R\, l_0 - 2\, R\, v_0 t}}.$$

Problema 2

1) Affinché i pianeti si ritrovino per la prima volta nuovamente allineati occorre che gli archi di cerchio percorsi lungo le rispettive orbite nello stesso tempo $T_A$ differiscano angolarmente di $2\,\pi$. Detti $T_1$ e $T_2$, con $T_1 < T_2$, i periodi delle orbite, deve quindi essere

$$\frac{T_A}{T_1} - 1 = \frac{T_A}{T_2}, \qquad \textit{ovvero} \qquad T_A\big(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\big) = 1,$$

da cui si ricava facilmente la relazione risolutiva

$$T_A = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}.$$

Ricordando la relazione tra periodi e raggi $T_i = K(R_i)^{\frac{3}{2}}$ si ottiene quindi la risposta

$$T_A = K\frac{(R_1 R_2)^{\frac{3}{2}}}{(R_2)^{\frac{3}{2}} - (R_1)^{\frac{3}{2}}}.$$

2) Notiamo innanzitutto che per la terza legge di Keplero il periodo del satellite $T_S$ soddisfa

$$T_S = K\big(\frac{R_1 + R_2}{2}\big)\big)^{\frac{3}{2}}.$$

Il tempo di volo del satellite $T_S/2$ è dato dalla differenza tra i tempi $t_1$ e $t_2$ che rappresentano rispettivamente il tempo di arrivo e quello di partenza del satellite, misurati a partire dall'istante dellallineamento. La differenza angolare tra le posizioni dei due pianeti al momento dell'arrivo e a quello della partenza deve invece essere pari a una semicirconferenza. Valgono quindi le due relazioni

$$t_1 - t_2 = \frac{1}{2} T_S,$$

$$\frac{t_1}{T_1} - \frac{t_2}{T_2} = \frac{1}{2}.$$

Risolvendo il sistema si ottiene facilmente

$$\frac{t_1}{T_1} = \frac{1}{2}\frac{T_2 - T_S}{T_2 - T_1}, \qquad \frac{t_2}{T_2} = \frac{1}{2}\frac{T_1 - T_S}{T_2 - T_1}.$$

3) Aggiungendo la quantità $n\, T_A$ ai tempi $t_1$ e $t_2$ la prima delle due equazioni del sistema resta immutata, mentre la seconda diventa

$$\frac{t_1 + n\, T_A}{T_1} - \frac{t_2 + n\, T_A}{T_2} = \frac{1}{2} + n\, T_A\big(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\big) = \frac{1}{2} + n.$$

Di conseguenza la differenza angolare è pari a una semicirconferenza più un numero intero di circonferenze, che è esattamente quanto ci si aspetta per una traiettoria che corrisponda alla precedente ma sia riferita all'n-esimo allineamento successivo a quello dato.