Sulla storia delle *coordinate di Fermi*

G. Iurato, P. Rossi

Sommario

Dopo un brevissimo accenno alla storia delle cosiddette *coordinate di Fermi* ed il loro ruolo in geometria differenziale e fisica matematica, si cercherà di rintracciare la base concettuale della loro definizione assieme alle ragioni fisiche sottostanti la loro introduzione, ripercorrendo lo sviluppo storico dei relativi lavori, da cui si evincerà, in particolare, il ruolo preponderante svolto da una serie di lavori di Tullio Levi-Civita compiuti fra il 1917 e il 1919.

In uno spazio curvo, una *linea geodetica* può equivalentemente definirsi sia come una curva di lunghezza minima, sia come una curva autoparallela. In quest'ultimo caso, tale linea è individuata da un qualsiasi vettore tangente ad essa, trasportato parallelamente a sé stesso (*trasporto parallelo*). In ogni punto dello spazio-tempo, si può semplificare l'equazione della geodetica introducendo un opportuno sistema di coordinate, dette *coordinate normali* (o *localmente geodetiche*), rispetto a cui i simboli di Christoffel si annullano proprio in quel punto, individuando, così, un intorno di esso in cui lo spazio-tempo può essere considerato euclideo e la metrica, dunque, riducentesi a quella pitagorica; in questo caso, la derivata covariante si riduce a quella ordinaria. In tale intorno, la linea geodetica è localmente una retta. Queste particolari coordinate, a loro volta, differiscono da punto a punto, per cui esse sono soggette a ben determinate trasformazioni ([34], Parte II, Cap. VI, § 11; [36], Cap. 6, § 6.3)[1].

Si dimostra che, in un qualsiasi punto P di una varietà riemanniana, è sempre possibile definire un sistema di coordinate locali, di centro P, in cui i simboli di Christoffel si annullano in quel punto. Queste sono le coordinate normali di cui sopra, il cui insieme dicesi *sistema geodetico locale*, che furono introdotte da Riemann nel 1854, nella sua famosa dissertazione inaugurale sui fondamenti della geometria ([5], Ch. 2, Sect. 2.6; [17], Cap. 3, § 20; [15], Ch. III, Sect. 42; [39], Ch. 1, § 7). Nel 1922, Oswald Veblen dimostrò l'esistenza di coordinate normali in un generico punto di una varietà riemanniana a connessione lineare senza torsione ([46]). Nello stesso anno, Enrico Fermi dimostrò l'esistenza di particolari coordinate normali (in seguito dette *coordinate di Fermi*) lungo una curva (senza autointersezione) di una varietà riemanniana bidimensionale ([9]; cfr. pure [42], Ch. III, § 9, e [50]), risultato poi esteso, da Luther P. Eisenhart nel 1927, a una varietà bidimensionale a connessione affine (simmetrica) ([6]; cfr. pure [50], Seconda Lezione) e, da Lochlainn O'Raifeartaigh nel 1958, a una varietà affine di dimensione $n > 2$ a connessione lineare con torsione ([37]), sulla base di precedenti lavori di Jan A. Schouten e Dirk J. Struik, del 1935, relativi alla determinazione delle coordinate di Fermi per varietà riemanniane immerse in spazi euclidei (cfr. [37], § 2, pp. 15-16)[2]. Nel 1926, Tullio Levi-Civita dedusse poi le trasformazioni cui sono soggette le coordinate di Fermi lungo una curva (senza autointersezione) di una varietà riemanniana ([33]), mentre, nel 1933, Arthur G. Walker determinò tali coordinate per una qualsiasi curva di una varietà riemanniana, non necessariamente geodetica ([44], Ch. III, Sect. 5; [48]; cfr. pure [18])[3].

[1] Una completa bibliografia sulle coordinate normali si trova in [42], Ch. III, § 7, mentre, per delle brevi notizie storiche, vedasi pure [37].

[2] I notevoli risultati conseguiti da O'Raifeartaigh, verranno utilmente applicati, da Felix A.E. Pirani ([40]) nel 1960, a delle varietà spazio-temporali quadridimensionali della relatività generale.

[3] Per notizie storico-bibliografiche più complete sulle coordinate normali, cfr. [42], Ch. III, § 7.

Fu merito di Fermi, dunque, l'aver esteso la dimostrazione dell'esistenza di coordinate normali dal caso puntuale al caso di un curva geodetica su una varietà riemanniana. Dal punto di vista fisico, queste coordinate rappresentano un sistema di riferimento in caduta libera, la cui orientazione spaziale può essere individuata e definita tramite opportuni giroscopi. Ma, grazie al successivo lavoro di Walker, tramite una nuova nozione di trasporto parallelo, detto *trasporto di Fermi-Walker*[4], le coordinate normali di Fermi possono essere definite per una qualunque curva, come, ad esempio, per la linea d'universo di una particella soggetta ad una forza non gravitazionale. Fisicamente, dunque, le coordinate di Fermi-Walker lungo una linea d'universo non geodetica rappresentano un sistema di riferimento accelerato da una qualche forza non gravitazionale, la cui orientazione spaziale è ancora individuata e definita da giroscopi. Se la determinazione di un sistema geodetico locale in un punto dello spazio-tempo è espressione del *principio di equivalenza forte* della relatività generale ([1], Cap. 11, § 11.1; [38], Cap. 7), relativamente all'individuazione di un sistema di riferimento inerziale locale, si ha tuttavia che, cambiando punto dello spazio-tempo in cui considerare questa operazione, i corrispondenti sistemi inerziali locali non sono più equivalenti fra loro, bensì relati dal trasporto di Levi-Civita nel caso di una linea geodetica, ovvero dal trasporto di Fermi-Walker nel caso generale ([2]; [15], Ch. V, Sect. 61; [36], Cap. 6, § 6.3; [45], Ch. I, § 4).

Il primo lavoro scientifico[5] di Fermi ([7]), del gennaio del 1921, tratta, come recita il titolo, di questioni[6] inerenti la dinamica relativistica di un sistema rigido di cariche elettriche, in moto traslatorio, dotato di simmetria sferica, considerando le masse ivi coinvolte solo come masse inerziali (da Fermi chiamate *pesanti*), non come masse gravitazionali ([7], § 1); la trattazione è svolta entro la teoria della relatività ristretta, e la principale referenza seguita è il testo[7] di Owen William Richardson, *The Electron Theory of Matter*, edito dalla Cambridge University Press (UK) nel 1914, che Fermi studiò a fondo (cfr. [43], p. 17). Nel successivo lavoro ([8]), del marzo dello stesso anno, Fermi si propone di studiare – sempre parafrasando il titolo – fenomeni elettrostatici, generati da una data distribuzione simmetrica di cariche elettriche sotto l'azione di un campo gravitazionale uniforme, secondo la teoria della relatività generale[8]; in particolare,

[4]Il *parallelismo di Fermi-Walker*, come definito in [48], in quanto relativo al trasporto di vettori non necessariamente ortogonali alla linea oraria in questione, estende quello deducibile dal lavoro di Fermi [9], denominato *parallelismo di Fermi*, giacché relativo – quest'ultimo – al trasporto solo di vettori ortogonali alla linea oraria ([9], Nota I, § 2). Queste due nozioni, poi, coincidono fra loro (e, a loro volta, con quella basilare di *parallelismo di Levi-Civita*, introdotta in [19] e valida solo localmente) esclusivamente nel caso in cui la suddetta linea oraria è una geodetica. Tuttavia, sono soprattutto le nozioni di parallelismo secondo Fermi e Fermi-Walker ad avere maggiore importanza da un punto di vista fisico (cfr. [45], Ch. I, § 4, Ch. II, §§ 10, 11, 12).

[5]I primi tre articoli di Fermi, risalenti al periodo in cui egli era studente all'Università di Pisa, sono, in ordine cronologico, [7], [8] e [9], sebbene i primi due siano apparsi in stampa in ordine invertito: il primo, datato gennaio 1921, alle pagine 199-207, il secondo, datato marzo 1921, alle pagine 176-188. Per più ampie notizie storico-bibliografiche su Fermi, nel suo periodo pisano, cfr. [16] e le referenze ivi citate.

[6]Quasi tutti i lavori giovanili di Fermi, furono frutto del suo studio da autodidatta su argomenti di fisica e di matematica allora non impartiti nelle università italiane; cfr. [41], p. 47.

[7]Gli argomenti trattati corrispondono, grosso modo, a quelli che oggi formano l'usuale programma dei corsi di lezione di "struttura della materia" così come impartiti nei corsi di laurea in Fisica delle nostre università.

[8]In questo secondo lavoro non sono menzionate referenze, tranne un lavoro di Levi-Civita di cui parleremo in seguito. Tuttavia, come si evince dal terzo lavoro, la cui principale referenza è il testo di Hermann Weyl, intitolato *Raum, Zeit, Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie* e pubblicato dalla Julius Springer nel 1918, è verosimile che Fermi abbia tenuto in debito conto anche quest'ultima referenza nel redigere almeno quelle parti del secondo lavoro concernenti la relatività generale, giacché il testo di Richardson tratta solo della relatività ristretta, eccetto l'ultimo capitolo (il XXII), dedicato alla gravitazione ma trattata sempre dal punto di vista classico, con qualche accenno finale alle nuove teorie relativistiche di Einstein, tuttavia relegate alla relatività ristretta. Ciò, sulla base delle notizie bio-bibliografiche disponibili su Fermi ([3]; cfr. pure [47], p. 17), dalle quali risulta che a sua conoscenza fosse pure il *Traite de Physique* – opera in più di dieci volumi complessivi – di Orest Danijlovic Chwolson, pubblicato (in edizione francese, tradotta dal tedesco) fra il 1906 e il 1928, che passa in rassegna quasi tutti gli ambiti della fisica classica e di quella moderna del periodo; cfr. pure [14], Vol. I, Nota biografica, pp. XXIII-XXIV.

Fermi mette a confronto, per un sistema di cariche a simmetria sferica, studiato secondo la teoria elettrodinamica di Abraham-Lorentz, la *massa inerziale* (o *massa elettromagentica*) del sistema di cariche in esame (che da tensore, per un generico sistema di cariche dotato di simmetria, si riduce a uno scalare nel caso di una distribuzione a simmetria sferica) con la loro corrispondente *massa gravitazionale*, trovando una discrepanza fra queste che mal si conciliava sia con il principio di equivalenza della relatività generale che con l'elettrodinamica relativistica, questione che verrà quindi approfondita e risolta da Fermi in successivi lavori ([10], [11], [12], [13]), sulla base di una opportuna rivisitazione della nozione di corpo rigido in relatività (per un'analisi storica più dettagliata di questi lavori, cfr. [4], Ch. 3, Sect. 3.5).

Nella Parte Prima di [8], nell'accingersi a studiare gli effetti di un campo gravitazionale agente in una data regione dello spazio-tempo, Fermi ammette l'ipotesi che i fenomeni elettrostatici in questione non alterino, almeno localmente, la metrica dello spazio-tempo in cui questi hanno luogo, sicché, seguendo alcuni lavori di Tullio Levi-Civita (cfr. seguito), Fermi considera, per tale metrica, la seguente forma pseudoeuclidea[9]

$$ds^2 = adt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{1}$$

con $a = a(z)$. I lavori di Levi-Civita ([20], [21], [22], [23], [24]) cui Fermi fa riferimento (in modo esplicito, solo a [24][10]), sono i primi di una serie di note ([23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31]) in cui Levi-Civita si propone di studiare le equazioni gravitazionali einsteiniane in campi statici di tipo newtoniano[11], ad iniziare col trattare, in [21] e [23], il caso in cui ha luogo il moto di un punto materiale la cui influenza sul campo si suppone sia trascurabile. La condizione di staticità conferisce alla metrica ds^2 una forma differenziale particolarmente semplice, del tipo

$$ds^2 = \sum_{i,k=0}^{3} a_{ik}dx_idx_k = V^2dx_0^2 - \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}dx_idx_k \tag{2}$$

(cfr. [21], § 1, Eq. (1), pp. 458-59) dove x_0 è il tempo, x_1, x_2, x_3 le coordinate spaziali e $\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}dx_idx_k$ il quadrato dell'elemento differenziale lineare dello spazio fisico ambiente, con $V \geq 0$ costante – interpretata poi come velocità della luce[12] – e $a_{ik} = a_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ per ogni $i, k \in \{1, 2, 3\}$. Dopodiché, Levi-Civita passa, nei vari paragrafi di [21] e nelle successive note

[9]Da un punto di vista fisico-matematico, la forma quadratica differenziale (1) è intermedia fra quella ordinaria dello spazio-tempo minkowskiano (piatto) della relatività ristretta – a cui si riduce per $a \to c^2$ – e quella relativa allo spazio-tempo curvo della relatività generale, rappresentato da una ben precisa varietà riemanniana quadridimensionale V_4 di metrica $ds^2 = \sum_{i=0}^{3} a_{ik}dx_idx_j$, mediante un'opportuna scelta dei coefficienti a_{ik} sottostanti certe ipotesi fisico-matematiche introdotte da Tullio Levi-Civita e definenti la cosiddetta *statica einsteiniana* (cfr. seguito, in particolare la successiva nota a piè di pagina numero [12]).

[10]Tuttavia, da un punto di vista logico oltreché da una obiettiva indagine dei contenuti di [7], [8] e [9], non è possibile considerare isolatamente il lavoro [24] in modo avulso dagli altri ad esso strettamente correlati, ovverosia [20], [21], [22], [23], ai cui contenuti sembra più manifesto sussistano legami concettuali e formali dei lavori di Fermi di cui appena sopra.

[11]Lo studio di un campo fisico newtoniano dal punto di vista della relatività generale, deve essere inteso secondo quanto prospettato in [35], Cap. II, § 6.

[12]Ovvero, $a_{00} = V^2$. Fermi, invece, considera, a priori (in [8], Parte Prima, § 1, formula (1)), il coefficiente a_{00} quale una generica funzione, $a(z)$, di z, per poi esplicitarlo (in [9], Nota III, § 4 grazie alle nuove coordinate da lui introdotte in [9], Nota I, §§ 1, 2, Nota II, § 3, grazie alle quali perviene ad un'espressione formale – la (4) di [9], Nota I, § 2 – che pone in relazione il ds^2 in due distinti, generici punti P e Q della linea oraria in questione, infinitamente vicini fra loro, secondo una funzione parametricamente dipendente dalla curvatura geodetica $\vec{C}$ in P – cfr. formula (5) di [9], Nota I, § 2), a meno di un'opportuna sostituzione ausiliaria di variabili, in $a = v^2[1 + \vec{C} \cdot \overrightarrow{(M - P)}]$ ([9], Nota III, § 4, formula (10)) dove v è una costante avente le dimensioni fisiche di una velocità, $\vec{C}$ è il vettore avente per componenti le componenti covarianti della *curvatura geodetica* della linea oraria d'equazioni $x = y = z = 0$ (nella varietà riemanniana spazio-temporale V_4) e $\overrightarrow{(M - P)}$ è il vettore di componenti x, y, z. È proprio in merito a quest'ultima espressione per a che Fermi sembra aver maggiormente tenuto in debita considerazione i lavori di Levi-Civita (soprattutto [21], [22], [23], [24]) sulla statica einsteiniana e

([23], [24] e le seguenti), allo studio, assieme alle relative applicazioni fisiche, delle equazioni gravitazionali einsteiniane in queste condizioni di staticità relative a campi fisici newtoniani, in particolare risaltando, in [21], quelle relazioni che involgono la curvatura dello spazio fisico ambiente. In [22], poi, Levi-Civita, sempre contestualmente a questi lavori ([20], [21]), considera l'influenza di campi elettromagneitici stazionari sulla geometria dello spazio-tempo ambiente, che non rimane più euclidea ma è piuttosto formalizzata da opportuni spazi geometrici, detti *spazi normali di Bianchi*, la cui curvatura è funzione dell'intensità del campo elettromagnetico applicato, passando, quindi, all'esame della conseguente forma matematica assunta dal ds^2.

Fermi, dunque, cita [24] in [8], Parte Prima, § 1, ma, nei contenuti, sembra piuttosto far riferimento, seppur non menzionandoli, ai primi due di questa serie di lavori di Levi-Civita, cioè [21] e [23] (assieme a [22]), su cui si basano poi tutte le successive note, dalla prima [23], del 1917, alla nona [30] del 1919 (lavori che, in linea di principio, potevano tutti essere noti a Fermi), dedicate allo studio della forma differenziale quadratica fondamentale ds^2 in campi fisici di tipo newtoniano, dal punto di vista della relatività generale (a tal proposito, cfr. pure [35]). Dopodiché, in [8], Parte Prima, §§ 2, 3, Fermi utilizza il formalismo variazionale hamiltoniano della teoria classica dei campi (tratto da [49]) nel dedurre, sotto la particolare metrica (1), una generalizzasione dell'equazione di Poisson relativa al campo elettromagnetico generato dalla distribuzione di cariche in esame, sotto l'azione del dato campo gravitazionale, che Fermi fa dipendere dal coefficiente $a = a(z)$, ponendo $G = -(1/2)da/dz$, dove G è l'accelerazione di gravità del campo newtoniano in questione. Ottenuta quest'equazione, del relativo campo elettromagnetico Fermi ne trova le possibili soluzioni e ne discute le relative interpretazioni fisiche. In particolare, in [8], Parte Prima, § 4, ne studia la componente elettrica dovuta ad una sola carica elettrica, posta nell'origine delle coordinate, ferma in un campo gravitazionale uniforme d'intensità G, dimostrandone l'equivalenza a quella del campo elettromagnetico generato dalla stessa carica che, in assenza di campo gravitazionale, si muovesse di moto uniformemente accelerato, con accelerazione $G/2$, in senso opposto al dato campo gravitazionale. In [8], Parte Prima, § 5, Fermi studia, in ultimo, la distribuzione di cariche elettriche sopra un conduttore in un campo gravitazionale. Infine, nella Parte Seconda di [8], Fermi considera il caso di una distribuzione di cariche sostenute da un sistema rigido (ad esempio, un dielettrico rigido), per cui risolve la relativa equazione di Poisson, dedotta nella Parte Prima, separatamente per spostamenti rigidi traslatori e per spostamenti rigidi rotatori, giungendo così – nel caso traslatorio – al computo finale del peso della massa elettromagnetica (cioè, la sua massa gravitazionale) della carica totale del dato sistema, attraverso il controbilanciamento esercitato da un opportuno campo elettrico esterno appositamente applicato, ma pervenendo ad un risultato differente[13] da quello ad esso corrispondente, calcolato in assenza di campo gravitazionale ed internamente solo alla teoria della relatività ristretta, come precedentemente ottenuto in [7].

L'intenzione di Fermi è, dunque, risolvere questa discrepanza, intenzione che si concreterà nelle successive note [10], [11] e [12]. Tuttavia, prima di stendere questi tre lavori, Fermi pubblicherà, nel 1922, tre brevi note sui Rendiconti Lincei (presentate da Giuseppe Armellini, nella seduta del gennaio del 1922), ovvero [9], in cui, nel commento che le precede, redatto da Enrico Persico per le versioni ristampate nelle *Note e Memorie* di Fermi, pubblicate fra il 1962 e il 1965, a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei ([14], Vol. I), si accennerà a delle possibili motivazioni della loro stesura. Fra queste, Persico suppone che Fermi, durante l'elaborazione delle precedenti note [7], [8], abbia poi sentito l'esigenza di approfondire alcuni aspetti mate-

sulla conseguente forma del ds^2, nel porre l'attenzione al relazionare – soprattutto nel caso statico – il coefficiente a_{00} (o g_{00}) della forma ds^2 alla curvatura della varietà riemanniana in questione (cioè V_4, nel caso della relatività generale), in una maniera del tutto originale, conseguendo risultati non manifestamente presenti nei lavori di Levi-Civita.

[13] In [7], § 2, si trova una massa inerziale pari a $(4/3)U/c^2$ per una distribuzione di cariche elettriche a simmetria sferica, mentre in [9], § 6, si perviene ad una massa gravitazionale pari a U/c^2, dove U è l'energia elettrostatica delle cariche del sistema.

matici della trattazione formale di queste, della seconda in particolare ([8]), nonostante esse non siano menzionate esplicitamente in [9]. Persico riferisce inoltre che, a tal proposito, Fermi si orientò, nell'investigare più a fondo le relazioni fra i campi elettromagnetico e gravitazionale, verso la determinazione di opportune coordinate spazio-temporali che, in una regione spaziale sufficientemente piccola, avrebbero facilitato lo studio dei fenomeni fisici che in essa possono aver luogo. Queste conclusioni di Persico sono in accordo con quanto lo stesso Fermi asserisce fin dall'inizio della sua nota, in cui egli appunto premette come, per studiare dei fenomeni fisici che avvengono in vicinanza di una linea d'universo della varietà spazio-tempo, sia conveniente ricercare un opportuno sistema di riferimento in cui, localmente alla linea d'universo in questione, la geometria non si discostasse troppo da quella euclidea, in modo da avere, dunque, una forma matematica alquanto semplice per il ds^2.

Quindi, nelle prime due parti di [9] (Nota I e Nota II), Fermi costruisce esplicitamente tali coordinate, supponendo che la linea in questione sia una generica geodetica L giacente su un'arbitraria varietà riemanniana V_n pensata immersa in un opportuno spazio euclideo ordinario S_N di data dimensione N funzione di n. In ciò, egli segue ed applica sistematicamente, al § 1 di [9], i procedimenti adottati da Levi-Civita nel dedurre la sua nozione di *parallelismo* in una varietà riemanniana qualsiasi, citando[14] esplicitamente la relativa, famosa memoria del 1917 ([19])[15], nozione che si rivelerà cruciale proprio nell'individuare la base concettuale di queste coordinate normali, secondo un procedimento matematico originale (dovuto a Fermi) esposto al § 2 di [9] (Nota I) e al § 3 di [9] (Nota II), sulla base di quanto detto al § 1 di [9] (Nota I), e fondamentalmente centrato su un confronto locale fra la geometria della linea geodetica L nella varietà riemanniana V_n e la corrispondente linea L^* di S_N ottenuta da L mediante una corrispondenza biunivoca che localmente conserva gli archi e le loro lunghezze – cioè, una isometria locale, allora detta *applicabilità* – rispetto ad una previa immersione in un opportuno spazio euclideo S_n. Infine, alla Nota III di [9], Fermi passa in rassegna alcune applicazioni fisiche di quanto appena svolto alle precedenti note I e II (di [9]), utilizzando il formalismo variazionale della teoria dei campi, come esposto in [49], nel calcolare il campo elettromagnetico in assenza di eventuali perturbazioni dovute all'azione locale del campo metrico gravitazionale (ipotesi, questa, garantita dal fatto che, adottatando una metrica della forma (1), le relative variazioni di campo sono invero nulle), sulla falsariga di quanto fatto in [8], Parte Prima.

In conclusione, ci sembra che di una certa importanza storica sia il constatare come punto di riferimento costante delle argomentazioni formali di Fermi sia stata la particolare forma matematica dell'elemento quadratico diffenziale ds^2 da considerare di volta in volta nello svolgimento dei relativi calcoli. Infatti, già al § 1 di [8], Fermi prende in considerazione una metrica del tipo (1), formalmente semplice ed agevole dal punto di vista computazionale, nella forma utilizzata, negli anni 1917-19, da Levi-Civita in una serie di lavori dedicati alla *statica einsteiniana*[16], secondo una interpretazione fisica simile a quella pensata da Fermi nell'impostare la sua indagine fisica, volta a studiare localmente i fenomeni elettromagnetici in un campo gravitazionale. Adoperando questa metrica, infatti, punto di partenza delle analisi condotte da Levi-Civita a partire dalla nota [20], Fermi agevolmente riesce, mediante il formalismo hamiltoniano (seguendo [49]), a risolvere la problematica fisica che si era ripromesso di affrontare e risolvere in [7] e [8]. Tuttavia, mosso dalla sua infinita curiosità intellettuale, Fermi non si accontentò di assumere *a priori* questa metrica, ma si chiese come potesse essere ottenuta in casi più generali,

[14]In [9] (Nota I, Nota II), il testo di Weyl ([49]) è citato solo all'inizio del § 1 della Nota I, esclusivamente per una questione terminologica relativa alle varietà differenziabili prese in esame da Fermi.

[15]Nelle *Opere Matematiche. Memorie e Note* di Tullio Levi-Civita, pubblicate in 4 volumi dall'editore Zanichelli, questa memoria risulta precedere, in ordine cronologico, tutti i successivi lavori qui menzionati di Levi-Civita, complessivamente contenuti nel volume III delle suddette *Opere.*

[16]Definita dalla condizione per la quale tutti i coefficienti della forma quadratica fondamentale $ds^2 = \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}dx_i dx_k$ (cfr. (2), primo membro; cfr. altresì [32], § 1) sono indipendenti da t ed inoltre $g_{0k} = 0$, $k = 1, 2, 3$. Sulla statica einsteiniana, cfr. pure [35], Cap. I, §§ 10, 12, Cap. II, §§ 1, 4-8, 13.

ragion per cui, prima di passare a chiarire le questioni fisiche che gli si presentarono al termine dei lavori [7] e [8], risolse quest'ultimi interrogativi formali, con l'introduzione di nuove coordinate localmente geodetiche, pervenendo, così, ad una metrica simile alla (1) che poi metterà in relazione, al § 4 della Nota III di [9], proprio con quella utilizzata per la prima volta in [8], Parte Prima, § 1, su consultazione di [20] e delle successive note [23] e [24], in cui il coefficiente a è posto, ora, in relazione alla curvatura geodetica in maniera più esplicita e diretta rispetto a quanto fatto da Levi-Civita, ricorrendo al minimo ad argomenti fisico-matematici ausiliari (cfr. i §§ 1-4 di [9]).

Conclusioni. Da un punto di vista storico, dunque, la presente comunicazione è volta a porre in rilievo, rispetto alla letteratura già esistente sull'argomento (inerente le coordinate di Fermi), il ruolo svolto da una serie di lavori, [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], compiuti da Tullio Levi-Civita fra il 1917 ed il 1919 sulle proprietà matematiche della forma differenziale quadratica fondamentale ds^2 di una varietà riemanniana quadridimensionale e le loro implicazioni sia fisiche che matematiche riguardanti la relatività eisteiniana e le sue equazioni di campo. In [20], Levi-Civita introduce, tramite alcune relazioni fra i simboli di Christoffell introdotte da Luigi Bianchi (e dette poi *identità di Bianchi*) una nuova forma delle equazioni gravitazionali einsteiniane, che generalizza il principio di d'Alembert al caso della relatività generale, tramite un nuovo tensore $A_{ik},\ i,k=0,1,2,3$ le cui componenti fisicamente caratterizzano il comportamento meccanico locale di un sistema fisico in un dato campo gravitazionale, discutendo il caso di presenza o meno di altri campi fisici stazionari. Sulla base di questo primo lavoro, centrato sullo studio delle proprietà inerziali locali di un sistema fisico secondo la teoria della relatività generale nel caso statico, Levi-Civita approfondisce, in [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], la struttura matematica della forma quadratica fondamentale ds^2 nel caso di campi fisici (perlopiù statici) di tipo newtoniano, assieme alle possibili interpretazioni fisiche e fisico-matematiche, in diversi casi particolari (di cui uno preliminare trattato, in modo più specifico, in [22], relativamente al caso in cui agiscono campi elettromagnetici), prendendo le mosse dalla base concettuale della cosiddetta *statica einsteiniana* introdotta in [21], quindi più organicamente trattata in [35], Cap. I, §§ 10, 12, Cap. II, §§ 1, 4-8, 13.

Concludendo, dunque, le problematiche fisiche trattate da Fermi in [7] e [8], con le conseguenti questioni risolte poi in [10], [11], [12], sembrano siano state considerate, sia da un punto fisico che matematico, contestualmente a questa serie (i.e., [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], soprattutto i primi quattro) di importanti lavori di Levi-Civita sulla *statica einsteiniana*, compiuti fra il 1917 e il 1919, tutti successivi, comunque, alla cruciale memoria [19], redatta nel novembre del 1916 e pubblicata nel gennaio del 1917, che Fermi cita in [9], dove egli introduce quelle speciali coordinate geodetiche, poi denominate *coordinate di Fermi*, sulla base di procedimenti e ragionamenti matematici senz'altro originali ma che tuttavia prendeno le mosse – come si evince dalla trattazione svolta in [9], Nota I, § 1, Nota II, § 3 – da metodi e concetti tratti da [19], soprattutto in riguardo alla nozione di parallelismo in una varietà riemanniana e di trasporto parallelo di un riferimento ortonormale lungo una linea preassegnata giacente in tale varietà; queste coordinate, discusse in [9], Nota I, § 2 e già interessanti di per sé stesse da un punto di vista meramente geometrico, gli permetteranno soprattutto di svolgere più agevolmente, in [9], Nota III, § 5, il calcolo variazionale relativo alla trattazione hamiltoniana del campo elettromagnetico variamente coinvolto nelle questioni fisiche di cui ai summenzionati lavori [7] e [8], nonché chiarire, al contempo, alcuni inerenti argomentazioni ed aspetti fisici, mettendo in evidenza la dipendenza parametrica dell'azione di campo (data dalla formula (11) di [9], Nota III, § 5) dalla curvatura geodetica per il tramite del parametro a del ds^2 espresso secondo quelle apposite coordinate geodetiche precedentemente introdotte da Fermi.

In questo modo, Fermi si propone, fin da [9] (Parte Prima, § 1), di ridursi al caso pseudoeuclideo del cosiddetto *cronotopo* (o spazio-tempo minkowskiano; cfr. [35], Cap. I, § 2), considerando una metrica differenziale del tipo (1), col parametro a che, in generale, è una data funzione (costante, con $a \to c^2$, solo nel caso in cui è trascurabile il campo gravitazionale e la varietà spazio-tempo V_4 si riduce allo spazio-tempo minkowskiano piatto), metrica che, nella forma matematica, è simile a quella del ds^2 dello spazio-tempo (piatto) della relatività ristretta, rendendo, così, possibile l'usuale trattazione hamiltoniana della teoria dei campi fisici (elettromagnetici) agenti, in V_4, secondo una modalità, dunque, tale da non alterare[17] sensibilmente la suddetta metrica (1), introdotta da Levi-Civita nel caso riguardante la *statica einsteiniana* che, in termini euristici, possiamo definire come un ambito di studio intermedio fra il caso della relatività ristretta (in cui si suppone sussita una indipendenza fra i fenomeni elettromagnetici ed i campi di materia) e quello della relatività generale (in cui v'è una dipendenza fisica fra campi gravitazionali e campi elettromagnetici tale da non potersi formalmente trattare entro il solo ambito della teoria della relatività ristretta).

Riferimenti bibliografici

[1] V. Barone, *Relatività. Princìpi e applicazioni*, Bollati Boringhieri editore, Torino, 2004.

[2] B. Bertotti, "Le coordinate di Fermi e il Principio di Equivalenza", in: C. Bernardini, L. Bonolis (a cura di), *Conoscere Fermi nel centenario della nascita 29 settembre 1901-2001*, Pubblicazioni della Società Italiana di Fisica (SIF), Bologna, 2001, pp. 114-125.

[3] L. Bonolis, "Cronologia dell'opera scientifica di Enrico Fermi", in: C. Bernardini, L. Bonolis (a cura di), *Conoscere Fermi nel centenario della nascita 29 settembre 1901-2001*, Pubblicazioni della Società Italiana di Fisica (SIF), Bologna, 2001, pp. 319-377.

[4] G. Bruzzaniti, *Enrico Fermi. The Obedient Genius*, Translated by Ugo Bruzzo, Springer International Publishing, AG Switzerland, 2016.

[5] M. Carmeli, *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1982.

[6] L.P. Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry*, AMS-American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume 8, Providence (RI), 1927.

[7] E. Fermi, "Sulla dinamica di un sistema rigido di cariche elettriche in moto traslatorio", *Il Nuovo Cimento*, 22 (1) (1921) pp. 199-207.

[8] E. Fermi, "Sull'elettrostatica di un campo gravitazionale uniforme e sul peso delle masse elettromagnetiche", *Il Nuovo Cimento*, 22 (1) (1921) pp. 176-188.

[9] E. Fermi, "Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria", *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie V – Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, Anno 1922, Volume 31, Fascicolo I, pp. 21-23 (Nota I), 51-52 (Nota II), 101-103 (Nota III).

[10] E. Fermi, "Correzione di una grave discrepanza fra la teoria delle masse elettromagnetiche e la teoria della relatività. Inerzia e peso dell'elettricità. Nota I", *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie V – Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, 31 (1) (1922) pp. 184-187.

[17] Cfr. la nota a piè di pagina numero [9].

[11] E. Fermi, ”Correzione di una grave discrepanza fra la teoria elettrodinamica e quella relativistica delle masse elettromagnetiche. Inerzia e peso dell'elettricità. Nota II”, *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie V – Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, 31 (1) (1922) pp. 306-309.

[12] E. Fermi, ”Correzione di una contraddizione tra la teoria elettrodinamica e quella relativistica delle masse elettromagnetiche”, *Il Nuovo Cimento, Serie VI*, 25 (1) (1923) pp. 159-170.

[13] E. Fermi, ”Le masse nella teoria della relatività”, Appendice a: A. Kopff, *I fondamenti della relatività Einsteiniana*, edizione italiana a cura di R. Contu e T. Bembu, Ulrico Hoepli Editore, Milano, 1923, pp. 342-344.

[14] E. Fermi, *Note e Memorie*, 2 voll., a cura di E. Amaldi, H.L. Anderson, E. Persico, F. Rasetti, E. Segrè, A. Wattenberg, Accademia Nazionale dei Licei, Roma, 1962-65.

[15] V. Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation*, 2nd Revised Edition, Pergamon Press, Oxford, UK, 1964.

[16] A. Gambassi, ”Enrico Fermi in Pisa”, *Physics in Perspective*, 5 (4) (2003) pp. 384-397.

[17] G. Gentili, F. Podestà, E. Vesentini, *Lezioni di geometria differenziale*, Bollati Boringhieri editore, Torino, 1995.

[18] B.Z. Iliev, *Handbook of Normal Frames and Coordinates*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[19] T. Levi-Civita, ”Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana”, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, XLII (1917) pp. 173-204.

[20] T. Levi-Civita, ”Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein, *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie V – Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, XXVI (1) (1917) pp. 381-391.

[21] T. Levi-Civita, ”Statica einsteiniana”, *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie V – Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, XXVI (1) (1917) pp. 458-470.

[22] T. Levi-Civita, ”Realtà fisica di alcuni spazi normali del Bianchi”, *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie V – Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, XXVI (1) (1917) pp. 519-531.

[23] T. Levi-Civita, ”Sui ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. I: Generalità e prima approssimazione”, *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie V – Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, XXVI (2) (1917) pp. 307-317.

[24] T. Levi-Civita, ”Sui ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. II: Condizioni di integrabilità e comportamento geometrico spaziale”, *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie V – Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, XXVII (1) (1918) pp. 3-12.

[25] T. Levi-Civita, ”Sui ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. III: Formule ausiliarie”, *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie V – Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, XXVII (2) (1918) pp. 183-191.

[26] T. Levi-Civita, ”Sui ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. IV: Il sottocaso B_2): Riduzione delle equazioni differenziali”, *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie V – Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, XXVII (2) (1918) pp. 220-229.

[27] T. Levi-Civita, ”Sui ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. V: Il sottocaso B_2): Soluzioni longitudinali ($\zeta = 0$)”, *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie V – Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, XXVII (2) (1918) pp. 240-248.

[28] T. Levi-Civita, "Sui ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. VI: Il sottocaso B_2): Soluzioni quadrantali ($v = 0$)", *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie V – Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, XXVII (2) (1918) pp. 283-292.

[29] T. Levi-Civita, "Sui ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. VII: Il sottocaso B_2): Soluzioni oblique", *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie V – Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, XXVII (2) (1918) pp. 343-351.

[30] T. Levi-Civita, "Sui ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. VIII: Soluzioni binarie di Weyl", *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie V – Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, XXVIII (1) (1919) pp. 3-13.

[31] T. Levi-Civita, "Sui ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. IX: L'analogo del potenziale logaritmico", *Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie V – Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, XXVIII (I) (1919) pp. 101-109.

[32] T. Levi-Civita, "La teoria di Einstein e il principio di Fermat", *Il Nuovo Cimento, Serie VI*, 16 (1) (1918) pp. 105-114.

[33] T. Levi-Civita, "Sur l'écart géodesique", *Mathematische Annalen*, 97 (1926) pp. 291-320.

[34] T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, raccolte e compilate dal Dott. Enrico Persico, Alberto Stock Editore, Roma, 1925.

[35] T. Levi-Civita, *Fondamenti di Meccanica Relativistica*, Redatti dal Prof. Enrico Persico, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1928.

[36] H.C. Ohanian, R. Ruffini, *Gravitazione e spazio-tempo*, Zanichelli Editore, Bologna, 1997.

[37] L. O'Raifeartaigh, "Fermi coordinates", *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, 59 (1957-58) pp. 15-24.

[38] W. Pauli, *Teoria della relatività*, Editore Boringhieri, Torino, 1974.

[39] A.Z. Petrov, *Einstein Spaces*, Pergamon Press, Ltd., London, 1969.

[40] F.A.E. Pirani, "A Note on Fermi Coordinates", *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, 61 (1960-61) pp. 9-14.

[41] F. Rasetti, "Enrico Fermi e la Fisica Italiana", in: C. Bernardini, L. Bonolis (a cura di), *Conoscere Fermi nel centenario della nascita 29 settembre 1901-2001*, Pubblicazioni della Società Italiana di Fisica (SIF), Bologna, 2001, pp. 46-56.

[42] J.A. Schouten, *Ricci Calculus. An Introduction to Tensor Analysis and Its Geometrical Applications*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 1954.

[43] E. Segrè, *Enrico Fermi, fisico. Una biografia scientifica*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1971.

[44] D.J. Struik, *Theory of Linear Connections*, Verlag Von Julius Springer, Berlin, 1934.

[45] J.L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.

[46] O. Veblen, "Normal Coordinates for the Geometry of Paths", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 8 (7) (1922) pp. 192-197.

[47] R. Vergara Caffarelli, *Enrico Fermi. Immagini e documenti.* Con scritti di Roberto Vergara Caffarelli ed Elena Volterrani. Nel Centenario della nascita di Enrico Fermi (1901-2001), La Limonaia. Associazione per la diffusione della cultura scientifica e tecnologica – Edizioni PLUS, Pisa, 2001.

[48] A.G. Walker, ''Relative Co-ordinates'', *Proceedings of the Royal Society of Edimburgh*, 52 (1933) pp. 345-353.

[49] H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie*, Verlag Von Julius Springer, Berlin, 1918.

[50] H. Weyl, *Analisi matematica del problema dello spazio*, traduzione e note aggiuntive a cura di Angelo Loinger, Zanichelli Editore, Bologna, 1990.