ALGORITMI MATEMATICI
NELLE LETTERE DI GERBERT

La scuola di Gerbert

- IL *TRIVIUM*
  - Grammatica (Aristotele, Porfirio, Boezio, Vittorino)
  - Dialettica
  - Retorica (Cicerone, Poeti classici, *sophista*)

- IL *QUADRIVIUM*
  - Aritmetica (Abaco)
  - Geometria (Manuale)
  - Musica (Monocordo, Organi)
  - Astronomia (Sfere, Astrolabio)

- La nostra fonte principale è Richer di St Remi, allievo di Gerbert
  - *Storie*, Libro III, 46-54

Le lettere scientifiche

- L'epistolario di Gerbert comprende sette lettere scientifiche, delle quali sei indirizzate a Costantino, suo allievo e futuro abate di Micy:

  1. Regole della moltiplicazione e della divisione

  2. Introduzione al trattato di aritmetica

  3. Costruzione della sfera

  4-5-6. Sui numeri superparticolari

- L'ultima lettera è diretta al prete Adelboldo, futuro vescovo di Utrecht, autore di un trattatello sul calcolo del volume della sfera: nella lettera è discusso il calcolo dell'area del triangolo equilatero.

- Ricordiamo anche la lettera 153 indirizzata a fratello Adam e relativa al problema del calcolo della durata del dì e della notte alle diverse latitudini in differenti periodi dell'anno

Regole per la moltiplicazione e la divisione

- Le regole di Gerbert per la moltiplicazione appaiono nel complesso abbastanza banali ai nostri occhi, ma vanno collegate alle istruzioni per l’uso dell’abaco, che Gerbert propugnava, associandolo per la prima volta in Europa alle cifre indo-arabiche e all’introduzione della notazione posizionale:

  - nel Medioevo gli abacisti erano detti anche gerbertisti

  - anche l’opera fondamentale di Fibonacci si chiama *Liber abaci*

- Per lo stesso motivo le regole per la divisione sono molto complesse e di difficile comprensione: la loro interpretazione moderna è stata data soltanto nel 1864 da G. Friedlein in Gerberts Regeln der Division

I numeri superparticolari

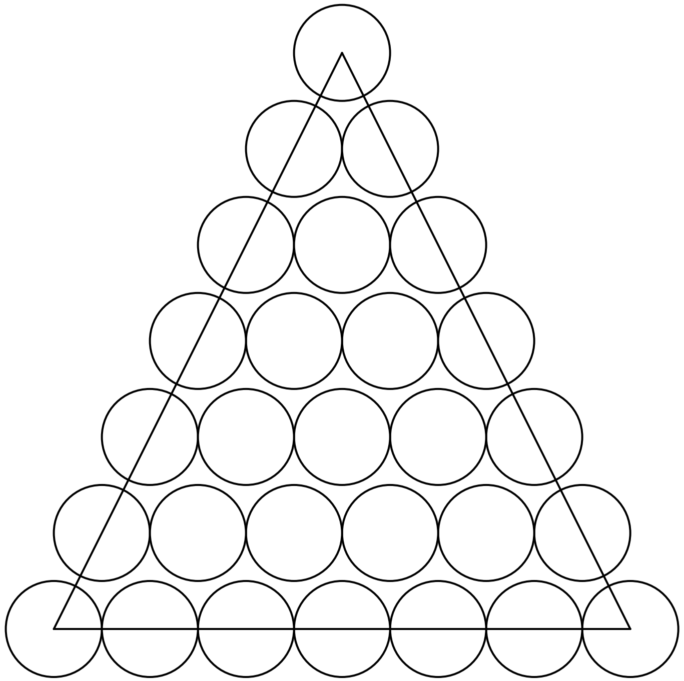
- I rapporti superparticolari sono frazioni che si ottengono aggiungendo all'unità l'inverso di un intero, ed equivalgono ai rapporti tra numeri immediatamente successivi:
  – $1 + 1/2 = 3/2$ rapporto sesquipedale
  – $1 + 1/3 = 4/3$ rapporto sesquiterzo
  – $1 + 1/4 = 5/4$ rapporto sesquiquarto

- Questi rapporti sono particolarmente importanti nella teoria musicale, essendo legati ai rapporti di frequenza tra le note nella scala naturale e ai principali accordi.

- La spiegazione di un oscuro passo di Boezio (*Institutio Arithmetica* II, 1), presentata da Gerbert nell'ultima lettera a Costantino, era ancora nota e accettata nel XIII secolo.

L’area del triangolo equilatero (1)

Gerbert trova in Boezio una formula per l’area dei triangoli equilateri, che definisce regola aritmetica, e che si riduce alla somma dei primi N numeri.



La regola è erronea, ed è fondata sul malinteso generato dalla figura qui a fianco, quando si trascuri la riduzione nella distanza verticale tra le righe dovuta all’impacchettamento.

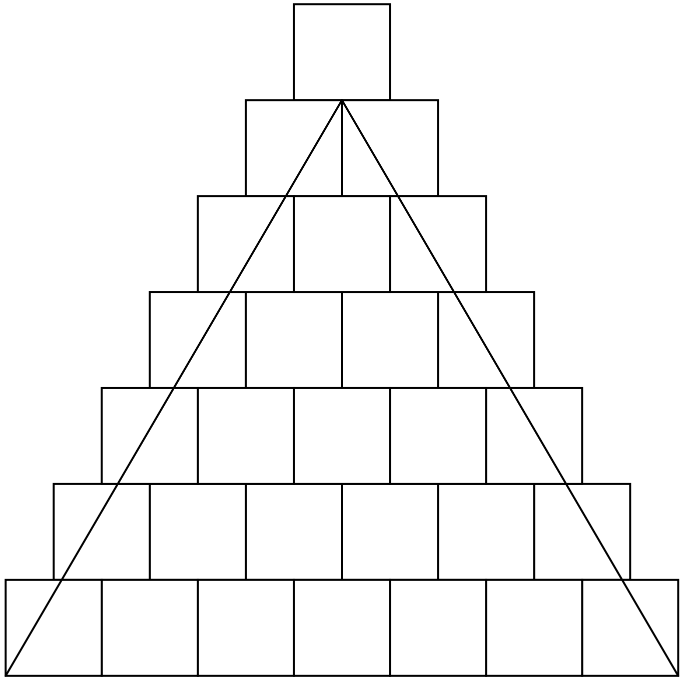
L'area del triangolo equilatero (2)

Gerbert propone come alternativa l'uso della frazione 6/7 per il rapporto tra base e altezza del triangolo.

Si osservi che 6/7 è l'inverso di un rapporto superparticolare, e che la frazione 1/7 entra anche nella formula dell'area del cerchio di Adelboldo, che usa $3 + 1/7 = 22/7 = 3{,}1428\ldots$ al posto di $\pi = 3{,}1416\ldots$

Notiamo che $6/7 = 0{,}8571\ldots$ mentre sappiamo che il valore vero è

$\sqrt{3}/2 = 0{,}8660\ldots$



L’area del triangolo equilatero (3)

- Ma Gerbert conosceva il valore vero (e il teorema di Pitagora)?
- Possiamo ricostruire le conoscenze di Gerbert a partire dal fatto che parte dall’analisi di un triangolo in cui il rapporto tra altezza e base è 26/30 (= 0,8667…) e la terna 15-26-30 è la prima terna di interi maggiori di 10, di cui il minore è la metà del maggiore, che viola la relazione pitagorica di una sola unità:

$$26 \times 26 + 15 \times 15 = 30 \times 30 + 1$$

- Si noti che $\sqrt{3}$ è irrazionale, quindi <u>non esistono</u> terne esattamente pitagoriche del tipo indicato, e 26/30 è la miglior approssimazione razionale ottenibile con numeri “piccoli”: il primo miglioramento si otterrebbe con la terna 41-71-82:   71/82 =0,8659…
- Ma evidentemente Gerbert voleva fornire una regola basata su numeri di una sola cifra (*in minoribus numeris libet exemplificare*), e con questa restrizione 6/7 è la migliore scelta.

e chi vuole approfondire…

… può consultare i contributi più recenti:

- M Materni, *Gerberto d'Aurillac: un maestro delle* artes reales, Spolia, Roma 2007
- C. Sigismondi, *La Sfera – Da Gerberto al Sacrobosco,* Scienza e Fede 9, Ateneo Pontificio Regina Apostolorum, Roma 2008
- Gerbert d'Aurillac (Silvestro II) – *Lettere (983-997)*, trad. P. Rossi Edizioni PLUS, Pisa 2009

…e tutti i lavori citati dai precedenti…

rossi@df.unipi.it