MECCANICA CLASSICA - Prova scritta - A.A. 2009/2010
Sessione invernale - Primo appello
Venerdì 4 Febbraio 2011 - ore 9

SOLUZIONI

Problema A.1

1) Esprimendo le coordinate cartesiane della massa m in funzione della coordinata θ che misura l'angolo di deviazione dalla verticale della seconda sbarra si determinano le relazioni

$$x = l_1 \cos\omega t - l_2 \sin\theta \sin\omega t,$$

$$y = l_1 \sin\omega t + l_2 \sin\theta \cos\omega t,$$

$$z = -l_2 \cos\theta.$$

Il modulo quadro della velocità misurata nel riferimento inerziale vale quindi

$$v^2 = \omega^2 l_1^2 + l_2^2 \dot\theta^2 + \omega^2 l_2^2 \sin^2\theta - 2\,\omega\, l_1 l_2 \cos\theta\,\dot\theta.$$

Trascurando termini costanti e notando che il termine proporzionale a $\cos\theta\,\dot\theta$ è una derivata totale rispetto al tempo possiamo quindi scrivere la Lagrangiana esatta nella forma

$$L = \frac{1}{2} m[l_2^2\,\dot\theta^2 + \omega^2 l_2^2 \sin^2\theta] + m\,g\,l_2\cos\theta.$$

2) La condizione di equilibrio dinamico si riduce alla richiesta che le equazioni del moto siano risolte per valori costanti della coordinata, mentre tutti i termini contenenti derivate rispetto al tempo si annullano. Deve quindi valere

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = m\,l_2^2[\omega^2 \sin\theta\,\cos\theta - \omega_p^2 \sin\theta] = 0,$$

dove abbiamo introdotto per comodità di notazione la frequenza di pendolo $\omega_p^2 = g/l_2$.

La condizione richiede quindi che all'equilibrio valga $\sin\theta = 0$ oppure $\cos\theta = \omega_p^2/\omega^2$.

Di conseguenza quando $\omega_p^2 > \omega^2$ esistono due posizioni di equilibrio, corrispondenti a $\theta = 0$ e a $\theta = \pi$, mentre nel caso opposto esistono quattro posizioni di equilibrio.

Per la stabilità dobbiamo calcolare la derivata seconda dei termini lagrangiani che non contengono $\dot\theta$ e valutarla ai punti di equilibrio. Poiché vale

$$\Omega^2 \equiv -\frac{1}{m\,l_2^2}\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2} = \omega_p^2 \cos\theta - \omega^2(2\,\cos^2\theta - 1)$$

possiamo osservare che quando $\theta = 0$ per $\omega_p^2 > \omega^2$ si ottiene $\Omega^2 > 0$ e si ha quindi una posizione di equilibrio stabile, mentre per $\omega_p^2 < \omega^2$ si ottiene $\Omega^2 < 0$ e l'equilibrio è instabile. Quando inveve $\theta = \pi$ si ha in ogni caso $\Omega^2 < 0$ e l'equilibrio è sempre instabile.

Viceversa, per $\omega_p^2 < \omega^2$, quando $\cos\theta = \omega_p^2/\omega^2$ risulta $\Omega^2 > 0$ e quindi queste due posizioni corrispondono a condizioni di equilibrio stabile.

3) La frequenza delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio è semplicemente il valore assunto da Ω all'equilibrio.

Per $\omega_p^2 > \omega^2$ vale quindi $\Omega = \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$.

Per $\omega_p^2 > \omega^2$ vale invece $\Omega = \frac{1}{\omega}\sqrt{\omega^4 - \omega_p^4}$.

Problema A.2

1) Imponiamo l'invarianza delle parentesi fondamentali, notando che in generale per le trasformazioni date

$$\{q,p\}_{Q,P} = \alpha^2\gamma(P+\beta)^{2\gamma-1}.$$

Riconosciamo quindi facilmente che per la canonicità deve valere

$$\alpha^2\gamma = 1, \qquad\qquad 2\gamma - 1 = 0,$$

e di conseguenza deve essere

$$\alpha = \pm\sqrt{2}, \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{2},$$

mentre non occorre imporre alcuna condizione su β.

2) Le equazioni differenziali alle derivate parziali che devono essere soddisfatte dalle funzioni generatrici sono di facile integrazione, e si ottiene rispettivamente

$$F_1(q,Q) = \frac{1}{2}q^2\cot Q + \beta Q,$$

$$F_3(p,Q) = -\frac{1}{2}p^2\tan Q + \beta Q,$$

ed è anche facile verificare che le due funzioni sono connesse dall'appropriata trasformazione di Legendre $F_3 = F_1 - pq$.

Problema R.1

Indichiamo con la lettera A l'evento di ricezione del primo segnale da parte della prima astronave, con la lettera B l'evento di partenza da Terra della seconda astronave, con la lettera C l'evento di incontro tra le due astronavi e con la lettera D l'evento di ricezione a Terra del secondo messaggio di conferma.

1) Calcoliamo le coordinate spaziotemporali dei quattro eventi sopra indicati nel riferimento terrestre.

Deve valere in primo luogo $(c+v)t_A = L$, da cui

$$t_A = \frac{L}{c+v}, \qquad\qquad x_A = \frac{c\,L}{c+v}.$$

Poiché necessariamente $t_B - t_A = t_A$, risulta quindi

$$t_B = \frac{2\,L}{c+v}, \qquad\qquad x_B = 0.$$

Per l'evento C deve risultare $u(t_C - t_B) + vt_c = L$ e inoltre $x_C = u(t_C - t_B)$, per cui

$$t_C = \frac{L}{u+v}\frac{c+v+2u}{c+v}, \qquad\qquad x_C = \frac{u\,L}{u+v}\frac{c-v}{c+v}.$$

Infine per l'evento D deve valere $c(t_D - t_C) = x_c$, per cui

$$t_D = \frac{L}{u+v}\frac{c^2+cv+3cu-uv}{c(c+v)}, \qquad\qquad x_D = 0.$$

A questo punto è immediato ricavare la risposta alla domanda nella forma

$$t_D - t_B = \frac{L}{c}\frac{c-v}{c+v}\frac{u+c}{u+v}.$$

2) Notando che vale, nel riferimento della prima astronave,

$$t'_A = \gamma(v)(t_A + vx_A/c^2), \qquad\qquad t'_C = \gamma(v)(t_C + vx_C/c^2),$$

si ricava subito

$$t'_C - t'_A = \gamma(v)[(t_c - t_A) + v(x_C - x_A)/c^2],$$

ma vale anche, per la legge del moto della prima astronave, $x_C - x_A = -v(t_C - t_A)$.

Di conseguenza risulta

$$t'_C - t'_A = \gamma(v)(t_c - t_A)(1 - v^2/c^2) = \frac{t_C - t_A}{\gamma(v)} = \frac{L}{c}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\frac{u+c}{u+v}.$$

Si noti che la relazione ottenuta:

$$t_D - t_B = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}(t'_C - t'_A)$$

ha una chiara interpretazione (e verifica) in termini di effetto Doppler longitudinale.

Problema S.1

1) L'equilibrio meccanico si ottiene uguagliando il modulo della forza di gravità (diretta verso il basso) e quello della forza dovuta alla pressione del gas sul pistone (diretta verso l'alto). Risulta quindi $p\,A = M\,g$, da cui

$$p = \frac{Mg}{A}.$$

Poiché il sistema è isolato il lavoro compiuto dalla forza di gravità deve trasformarsi in energia interna del gas, e possiamo quindi scrivere la conservazione dell'energia, ricordando che per i gas perfetti vale in generale $p\,V = n\,R\,T$ e $U = n\,c_v T$:

$$M g\,h_0 + \frac{c_v}{R} p_0 A\,h_0 = M g\,h + \frac{c_v}{R} p\,A\,h,$$

dove per un gas biatomico vale $c_v = 5/2R$, $c_p = c_v + R = 7/2R$, e subito si ricava

$$\frac{h}{h_0} = 1 + \frac{1}{\gamma}\Big(\frac{p_0}{p} - 1\Big) = 1 + \frac{1}{\gamma}\Big(\frac{p_0 A}{M g} - 1\Big),$$

dove abbiamo introdotto la costante $\gamma = c_p/c_v$, che per un gas perfetto biatomico vale 7/5.

2) Dall'equazione di stato per i gas perfetti ricaviamo nel caso in esame

$$\Delta T = (\gamma - 1)\frac{M g (h_0 - h)}{n\,R} = \frac{A}{n\,R}(p\,h - p_0 h_0) \equiv \Big(\frac{p}{p_0}\frac{h}{h_0} - 1\Big) T_0,$$

da cui anche, sostituendo i risultati precedenti

$$\Delta T = \Big(\frac{p}{p_0} - 1\Big)\Big(1 - \frac{1}{\gamma}\Big) T_0.$$

Per il calcolo della variazione di entropia ricordiamo che per i gas perfetti vale in generale

$$\Delta S = n\big(c_v \ln\frac{p}{p_0} + c_p \ln\frac{h}{h_0}\big) \equiv n\,c_v\big(\ln\frac{p}{p_0} + \gamma \ln\frac{h}{h_0}\big),$$

da cui, utilizzando i risultati precedenti, otteniamo

$$\frac{\Delta S}{n\,c_v} = \ln\frac{p}{p_0} + \gamma \ln\Big[1 + \frac{1}{\gamma}\Big(\frac{p_0}{p} - 1\Big)\Big] = \gamma \ln\frac{h}{h_0} - \ln\Big[1 + \gamma\Big(\frac{h}{h_0} - 1\Big)\Big].$$

3) Conviene a questo punto introdurre la variabile ausiliaria

$$x = 1 - \frac{h}{h_0} = \frac{1}{\gamma}(1 - \frac{p_0}{p}), \qquad \gamma x < 1,$$

mediante la quale risulta possibile scrivere la variazione di entropia nella forma

$$\frac{\Delta S}{n\,c_v} = \gamma \ln(1 - x) - \ln(1 - \gamma x).$$

Per valutare la dipendenza da x calcoliamo la derivata della variazione di entropia rispetto a x, ottenendo

$$\frac{d}{dx}\frac{\Delta S}{n\,c_v} = \frac{\gamma(\gamma - 1)x}{(1 - x)(1 - \gamma x)}.$$

Possiamo quindi verificare che la variazione di entropia non soltanto di annulla per $x = 0$, ma ha anche un minimo per $x = 0$, e questo implica che la variazione risulta sempre positiva per ogni x diverso da 0, indipendentemente dal segno di x.

Questo stesso risultato implica che all'ordine più basso in x vale

$$\frac{\Delta S}{n\, c_v} \approx \frac{1}{2}\gamma(\gamma - 1)x^2,$$

e quindi in prima approssimazione $\Delta S \approx 0$ e il processo risulta adiabatico.

Problema S.2

1) Nel caso in cui gli atomi siano tutti distinguibili, il numero dei microstati nella fase ordinata (basse temperature) è dato dal numero delle permutazioni degli atomi d'oro moltiplicato per il numero delle permutazioni degli atomi di rame, mentre il numero dei microstati nella fase disordinata (alte temperature) è dato dal numero delle permutazioni di tutti gli atomi, in quanto ogni sito risulta occupato casualmente:

$$\Gamma_{ord} = 3N!N!, \qquad\qquad \Gamma_{dis} = 4N!.$$

2) Nel caso in cui gli atomi di un metallo siano tra loro indistinguibili, nella fase ordinata esiste un solo microstato, mentre nella fase disordinata occorre dividere il numero totale delle permutazioni $4N!$ per il numero delle permutazioni di atomi identici:

$$\Gamma'_{ord} = 1, \qquad\qquad \Gamma'_{dis} = \frac{4N!}{3N!N!}.$$

3) Facendo uso della relazione $S = k \ln \Gamma$ otteniamo immediatamente

$$\Delta S = k \ln \frac{\Gamma_{dis}}{\Gamma_{ord}} = k \ln \frac{4N!}{3N!N!} = k \ln \frac{\Gamma'_{dis}}{\Gamma'_{ord}}.$$

Applicando poi la formula di Stirling per il calcolo dei fattoriali a grande N si ottiene facilmente

$$\Delta S = Nk(4 \ln 4 - 3 \ln 3).$$