MECCANICA CLASSICA - Prova scritta - A.A. 2009/2010
Sessione invernale - Secondo appello
Venerdì 25 Febbraio 2011 - ore 15

SOLUZIONI

Problema A.1

1) Introduciamo la coordinata s che misura la distanza lungo il piano inclinato a partire dall'asse delle x verso l'alto, e definiamo l'angolo α tale che $\tan\alpha = -y_0/x_0$.

Poiché in tal caso vale

$$x = x_0 - s\,\cos\alpha, \qquad\qquad y = s\,\sin\alpha,$$

la Lagrangiana assume la forma

$$L = \frac{1}{2}m\,\dot{s}^2 - \frac{1}{2}K\,s^2 + (K\,x_0\cos\alpha - m\,g\,\sin\alpha)s,$$

dove abbiamo trascurato termini costanti.

2) L'equazione del moto si ricava immediatamente e vale

$$m\,\ddot{s} = -K\,s + (K\,x_0\cos\alpha - m\,g\,\sin\alpha).$$

Di conseguenza la posizione di equilibrio statico è

$$s_0 = x_0\cos\alpha - \frac{mg}{K}\sin\alpha,$$

dove il primo termine rappresenta l'equilibrio in assenza di gravità (o per molla infinitamente forte).

3) Posto $\eta = s - s_0$ l'equazione del moto ii riduce a $m\,\ddot{\eta} = -K\,\eta$ e quindi il moto è sempre armonico e vale

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

Problema A.2

1) Si noti che il contributo del termine lineare nelle velocità alle equazioni del moto per x e y vale rispettivamente

$$\frac{dA}{dt} - \frac{\partial A}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial B}{\partial x}\dot{y} \equiv \Big(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\Big)\dot{y},$$

$$\frac{dB}{dt} - \frac{\partial A}{\partial y}\dot{x} - \frac{\partial B}{\partial y}\dot{y} \equiv \Big(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\Big)\dot{x},$$

e di conseguenza se $\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0$ tale contributo è nullo per entrambe le equazioni.

2) La condizione $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$ è la condizione di integrabilità per le equazioni

$$A(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad\qquad B(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Poiché queste equazioni nel caso considerato risultano integrabili vale quindi

$$A(x, y)\dot{x} + B(x, y)\dot{y} \equiv \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} = \frac{d}{dt}F(x, y).$$

Problema R.1

1) La condizione $s(t\,u - M^2m^2) = 0$, associata alla relazione $s + t + u = M^2 + m^2$, definisce due curve nel piano (t, u):

$$t + u = M^2 + m^2, \qquad\qquad t\,u = M^2m^2.$$

La seconda curva è costituita da due rami di iperbole asintotici agli assi x e y, mentre la prima curva è una retta inclinata a $-\pi/4$ che incrocia gli assi coordinati nei punti $(0, M^2+m^2)$ e $(M^2+m^2, 0)$ e il ramo più alto dell'iperbole nei punti (m^2, M^2) e (M^2, m^2).

2) La regione cinematicamente accettabile per il processo di decadimento è la regione del primo quadrante prossima all'origine e compresa tra il ramo di iperbole e la retta.

Consideriamo infatti il valore assunto dalle variabili di Mandelstam nel riferimento in cui M è in quiete:

$$s = M^2 + m^2 - 2M\varepsilon, \qquad\qquad t = M^2 - 2Mk_1, \qquad\qquad u = M^2 - 2Mk_2,$$

dove ε e p indicano energia e modulo dell'impulso della particella m.

Le equazioni per la frontiera diventano quindi:

$$\varepsilon = M - k_1 - k_2 = \frac{M^2 + m^2}{2\,m}, \qquad\qquad (M - 2k_1)(M - 2k_2) = m^2,$$

e rappresentano le condizioni soddisfatte dalle configurazioni in cui rispettivamente

a) i fotoni si muovono nella stessa direzione e verso ed m si muove nel verso opposto per cui $p = k_1 + k_2$,

b) m e un fotone si muovono nella stessa direzione e verso e l'altro fotone si muove nel verso opposto per cui $p = k_1 - k_2$.

Si noti che nel caso a) i fotoni si comportano come un singolo fotone di energia $k_1 + k_2$ e le relazioni sono le stesse che per un decadimento a due corpi.

3) Il processo $M + m \to \gamma + \gamma$ nel riferimento in cui M è in quiete (riferimento del laboratorio) corrisponde a

$$s = M^2 + m^2 + 2M\varepsilon, \qquad\qquad t = M^2 - 2Mk_1, \qquad\qquad u = M^2 - 2Mk_2.$$

Poiché $\varepsilon \geq m$ vale in questo caso $s \geq (M+m)^2$ e di conseguenza l'unica regione cinematicamente accettabile è quella situata sotto il ramo inferiore dell'iperbole. La frontiera corrisponde al caso di fotoni prodotti nella stessa direzione (quella di m incidente) ma necessariamente discordi in verso in quanto altrimenti varrebbe $s = 0$; vale quindi $p^2 = (k_1 - k_2)^2$.

Il processo $\gamma + M \to \gamma + m$ nel riferimento di quiete di M corrisponde a

$$s = M^2 + m^2 - 2M\varepsilon, \qquad t = M^2 + 2Mk_1, \qquad u = M^2 - 2Mk_2,$$

oppure al caso in cui gli indici 1 e 2 sono scambiati.

Per effetto dello scambio le regioni accettabili sono due, e corrispondono alle regioni comprese tra i rami dell'iperbole superiore e la retta che soddisfano rispettivamente i vincoli $t > M^2$ e $u > M^2$. Ancora una volta la frontiera descrive le configurazioni collineari, con fotoni rispettivamente concordi ($s = 0$) e discordi in verso.

Problema S.1

1) Il sistema è termicamente e meccanicamente isolato, per cui l'energia interna totale si deve necessariamente conservare. Poiché nel caso dei gas perfetti l'energia interna dipende soltanto dalla temperatura, vale la relazione

$$U = c_{vA} n_A R T_0 + c_{vB} n_B R T_0 = c_{vA} n_A R T_1 + c_{vB} n_B R T_1,$$

da cui banalmente $T_1 = T_0$.

La pressione all'equilibrio meccanico può essere ricavata utilizzando l'equazione di stato, che impone le relazioni

$$p_1 = \frac{n_A R T_1}{V'_A} = \frac{n_B R T_1}{V'_B},$$

dove V'_A e V'_B sono i volumi occupati dai due gas all'equilibrio nello stato 1, che devono ovviamente soddisfare anche la relazione $V'_A + V'_B = V_A + V_B$.

Risolvendo il sistema delle equazioni per i volumi si ottiene facilmente

$$V'_A = n_A \frac{V_A + V_B}{n_A + n_B}, \qquad V'_B = n_B \frac{V_A + V_B}{n_A + n_B},$$

e di conseguenza anche

$$p_1 = \frac{n_A + n_B}{V_A + V_B} R T_1.$$

2) Per il calcolo dell'entropia di un gas perfetto si può in questo caso utilizzare la relazione $S = n c_v \ln T + nR \ln \frac{V}{n} + S_0$, da cui sfruttando il fatto che la temperatura nel passaggio dallo stato 0 allo stato 1 non cambia si ottiene

$$\Delta S = n_A R \ln \frac{V'_A}{V_A} + n_B R \ln \frac{V'_B}{V_B} = n_A R \ln \frac{n_A}{n_A + n_B} \frac{V_A + V_B}{V_A} + n_B R \ln \frac{n_B}{n_A + n_B} \frac{V_A + V_B}{V_B}.$$

Introduciamo ora per comodità la notazione $x \equiv n_A/(n_A + n_B)$ e $y \equiv V_A/(V_A + V_B)$, per cui vale

$$\Delta S = (n_A + n_B)R\big[x \ln \frac{x}{y} + (1-x)\ln \frac{1-x}{1-y}\big].$$

Studiamo la dipendenza di ΔS da x, notando che vale

$$\frac{d}{dx}\Delta S = (n_A + n_B)R\big[\ln \frac{x}{y} - \ln \frac{1-x}{1-y}\big],$$

e questa funzione ha un estremo solo per $x = y$, nel qual caso $\Delta S = 0$.

Calcolando la derivata seconda otteniamo poi

$$\frac{d^2}{dx^2}\Delta S = \frac{(n_A + n_B)R}{x(1-x)},$$

che per $0 < x < 1$ è sempre positiva.

Di conseguenza risulta immediatamente $\Delta S \geq 0$, e l'uguaglianza corrisponde al caso in cui gli stati 0 e 1 coincidono. L'argomento potrebbe essere ripetuto utilizzando y come variabile, e si otterrebbe un risultato analogo.

3) Nel passaggio dallo stato 1 allo stato 2 cambia nuovamente il volume occupato da ciascun gas, e vale quindi

$$\Delta S = n_A R \ln \frac{V_A + V_B}{V'_A} + n_B R \ln \frac{V_A + V_B}{V'_B} = n_A R \ln \frac{n_A + n_B}{n_A} + n_B R \ln \frac{n_A + n_B}{n_B}.$$

Si dimostra che la variazione di entropia è sempre positiva in modo del tutto analogo al precedente, con la differenza che anche al minimo (che si verifica quando $n_A = n_B$) la variazione di entropia non è nulla (entropia di mescolamento).

Problema S.2

1) Notiamo innanzitutto che la probabilità $P(m, N)$ che, su un totale di N passi, m passi siano verso destra è data dalla distribuzione binomiale:

$$P(m, N) = \binom{N}{m} p^m (1-p)^{N-m}.$$

Il valore atteso dello spostamento verso destra si ottiene dalla differenza tra il valore atteso del numero dei passi verso destra e quello dei passi verso sinistra. Calcoliamo quindi $< m > - < N - m > = < 2m - N >$.

Poiché per la distribuzione binomiale vale

$$< m > = \sum_0^N m\, P(m, N) = N\, p$$

si ottiene immediatamente

$$< 2m - N > = N(2p - 1).$$

2) Lo scarto quadratico medio vale in questo caso, per quanto sopra ricavato,

$$\sigma^2 \equiv < (2m - N)^2 > -(< 2m - N >)^2,$$

e poiché per la distribuzione binomiale vale

$$< m^2 >= \sum_0^N m^2 P(m, N) = (Np)^2 + Np(1 - p)$$

assemblando tutti i termini si ricava

$$< (2m - N)^2 >= N^2(2p - 1)^2 + 4Np(1 - p),$$

e di conseguenza

$$\sigma^2 = 4Np(1 - p).$$

La diffusione è quindi in generale, come per il moto browniano, proporzionale a $\sqrt{N}$, ed è massima per $p = \frac{1}{2}$.