MECCANICA CLASSICA- Prova scritta - A.A. 2010/2011
Sessione estiva - Primo appello
Giovedì 30 giugno 2011 - ore 9

La prova consiste nei problemi **A.1, R.1, S.1**. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Il recupero della prima prova in itinere consiste nei problemi **A.1, A.2**. Il recupero della seconda prova in itinere consiste nei problemi **R.1, R.2**. Il recupero della terza prova in itinere consiste nei problemi **S.1, S.2**. Il tempo a disposizione per ciascuna prova è di due ore.

La prova scritta di Fisica aIII consiste nei problemi **A.1, A.2, R.1**. Il tempo a disposizione è di tre ore. La prova scritta di Fisica aIV consiste nei problemi **S.1, S.2**. Il tempo a disposizione è di due ore.

Problema A.1

Una teleferica è schematizzabile come un sistema costituito da una guida rettilinea inclinata di un angolo α rispetto al suolo, lungo la quale scorre una massa M, libera di muoversi ma soggetta alla gravità. Alla massa M è appesa mediante un'asta di lunghezza L e massa trascurabile una seconda massa m libera di oscillare sul piano verticale passante per la guida.

1) Scrivere la Lagrangiana del sistema e ricavare le equazioni del moto utilizzando come variabili la posizione s della massa M lungo la guida e l'angolo θ formato dall'asta con la verticale.

2) Mostrare che è possibile scrivere un'equazione che coinvolge la sola variabile θ e definire un'energia conservata dipendente soltanto da θ e da $\dot{\theta}$.

3) Mostrare, introducendo la variabile $\varphi = \theta - \alpha$, che in un opportuno riferimento accelerato il sistema si comporta come se la guida fosse orizzontale, φ fosse l'angolo con la verticale e la gravità valesse $g \cos \alpha$. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni.

Problema A.2

SI consideri il sistema descritto dalla Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} A(\dot{x}\, y - \dot{y}\, x) - \frac{1}{2} K_1 x^2 - \frac{1}{2} K_2 y^2.$$

Si determinino le frequenze proprie delle piccole oscillazioni del sistema.

Problema R.1

In un particolare moto accelerato unidimensionale vale, nell'intervallo di tempo $0 \leq t < \pi/2K$, la seguente relazione tra tempo proprio τ e tempo t del riferimento inerziale: $\tau = \sin Kt/K$. Calcolare esplicitamente:

1) La velocità relativa al riferimento inerziale nel quale l'oggetto è inizialmente in quiete come funzione del tempo t.

2) La legge oraria $x(t)$ del moto dell'oggetto nel riferimento inerziale.

3) L'accelerazione dell'oggetto nel riferimento inerziale di partenza e nel riferimento inerziale di quiete istantanea.

Problema R.2

Un quadrato di lato L si muove con velocità v su un piano sul quale si trova anche l'osservatore, viaggiando in una direzione parallela a due lati del quadrato. Il quadrato viene osservato (otticamente) alla minima distanza D dall'osservatore, e vale la condizione $L << D$.

Analizzando le coordinate (lungo la direzione del moto) delle posizioni di provenienza dei segnali ottici emessi dai quattro vertici del quadrato e giunti contemporaneamente all'osservatore, mostrare che l'immagine ottica del quadrato non appare contratta ma ruotata di un angolo tale che $\sin\theta = \beta \equiv v/c$.

Problema S.1

Un gas di van der Waals è caratterizzato dall'equazione di stato

$$\big(p + a\frac{n^2}{V^2}\big)(V - n\,b) = n\,R\,T,$$

dove n è il numero delle moli, a e b sono costanti caratteristiche del gas, R è la costante dei gas.

L'energia interna, per un gas di van der Waals monoatomico, vale

$$U = \frac{3}{2}n\,R\,T - a\frac{n^2}{V}.$$

1) Calcolare l'entropia del gas come funzione del volume e dell'energia interna.

2) Scrivere l'equazione che descrive le trasformazioni adiabatiche del gas nel piano $(p,\,V)$ e il lavoro compiuto in una trasformazione adiabatica reversibile che fa passare il sistema dallo stato (p_1, V_1) allo stato in cui il volume è V_2.

3) Calcolare l'energia libera del gas come funzione del volume e della temperatura e individuare il valore T_c per cui, per ogni $T \geq T_c$, l'energia libera è una funzione convessa di V.

Problema S.2

Si consideri un sistema per il quale l'entropia soddisfa la relazione

$$\frac{S}{V} = \sigma\big(\frac{U}{V}\big).$$

Si ricavino le espressioni della temperatura e della pressione in funzione delle variabili U e V, lasciando indicate la funzione $\sigma(x)$ e la sua derivata $\sigma'(x)$. Su questa base si calcoli la funzione di Gibbs e si interpreti il risultato ottenuto alla luce dell'ipotesi iniziale.