MECCANICA CLASSICA - Prova scritta - A.A. 2010/2011
Sessione estiva - Primo appello
Giovedì 30 giugno 2011 - ore 9

SOLUZIONI

Problema A.1

1) Le coordinate cartesiane di M sono:

$$X = s\,\cos\alpha, \qquad\qquad Y = s\,\sin\alpha,$$

mentre le coordinate cartesiane di m sono

$$x = s\,\cos\alpha + L\,\sin\theta, \qquad\qquad y = s\,\sin\alpha - L\,\cos\theta.$$

Partendo dall'espressione dell'energia cinetica e dell'energia potenziale in coordinate cartesiane si ricava quindi la Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{s}^2 - (M+m)g\,s\,\sin\alpha + \frac{1}{2}m\,L^2\dot{\theta}^2 + m\,g\,L\,\cos\theta + m\,L\,\dot{s}\dot{\theta}\,\cos(\theta-\alpha).$$

Le equazioni del moto si ricavano notando che

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = (M+m)\dot{s} + m\,L\,\dot{\theta}\,\cos(\theta-\alpha),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\,L^2\dot{\theta} + m\,L\,\dot{s}\,\cos(\theta-\alpha),$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = -(M+m)g\,\sin\alpha,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m\,g\,L\,\sin\theta - m\,L\,\dot{s}\,\dot{\theta}\,\sin(\theta-\alpha).$$

Risulta quindi:

$$\ddot{s} + \frac{m\,L}{M+m}\frac{d^2}{dt^2}\sin(\theta-\alpha) = -g\,\sin\alpha,$$

$$L\ddot{\theta} + \cos(\theta-\alpha)\ddot{s} = -g\,\sin\theta.$$

2) Sostituendo la prima equazione del moto nella seconda si ricava:

$$\ddot{\theta} - \frac{m}{M+m}\cos(\theta-\alpha)\frac{d^2}{dt^2}\sin(\theta-\alpha) = \frac{g}{L}\big[\sin\alpha\,\cos(\theta-\alpha) - \sin\theta\big] = -\frac{g}{L}\cos\alpha\,\sin(\theta-\alpha).$$

Se ora introduciamo al posto di s la nuova variabile

$$S = s + \frac{m\,L}{M+m}\sin(\theta-\alpha)$$

la Lagrangiana si separa in due termini: $L(S,\theta) = L_1(S,\,\dot S) + L_2(\theta,\,\dot\theta)$, dove

$$L_1(S,\,\dot S) = \frac{1}{2}(M+m)\dot S^2 - (M+m)g\,S\,\sin\alpha,$$

$$L_2(\theta,\,\dot\theta) = \frac{1}{2}m\,L^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2\,L^2}{M+m}\dot\theta^2\cos^2(\theta-\alpha) + m\,g\,L\,\cos\alpha\,\cos(\theta-\alpha).$$

Di conseguenza é possibile definire un'energia conservata dipendente solo da θ e $\dot\theta$, grazie alla relazione

$$E(\theta,\dot\theta) = \frac{\partial L_2}{\partial\dot\theta}\dot\theta - L_2 = \frac{1}{2}m\,L^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2\,L^2}{M+m}\dot\theta^2\cos^2(\theta-\alpha) - m\,g\,L\,\cos\alpha\,\cos(\theta-\alpha).$$

3) La Lagrangiana L_1 corrisponde alla descrizione del moto di una massa $M+m$ che scende lungo il piano inclinato con accelerazione $g\,\sin\alpha$. Nel sistema di riferimento soggetto a questa stessa accelerazione il moto é quindi descritto semplicemente dalla Lagrangiana L_2. Passando alla variabile $\varphi = \theta - \alpha$ la Lagrangiana L_2 diventa poi:

$$L_2 = \frac{1}{2}m\,L^2\dot\varphi^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2\,L^2}{M+m}\dot\varphi^2\cos^2\varphi + m\,g\,L\,\cos\alpha\,\cos\varphi.$$

Di conseguenza il moto in questo riferimento é lo stesso che si avrebbe se la guida fosse orizzontale, la gravitá si riducesse alla componente $g\,\cos\alpha$ normale al piano e il pendolo oscillasse formando un angolo φ con la verticale.

La frequenza delle piccole oscillazioni si ricava immediatamente dall'equazione del moto per φ nel limite di piccolo φ e vale

$$\omega^2 = \frac{M+m}{M}\frac{g}{L}\cos\alpha.$$

Problema A.2

La Lagrangiana proposta é quadratica nelle variabili dinamiche. Le equazioni del moto sono pertanto lineari, e hanno la forma

$$m_1\ddot x + A\dot y + K_1 x = 0,$$

$$m_2\ddot y - A\dot x + K_2 y = 0.$$

Si tratta quindi di determinare la condizione di risolubilitá delle equazioni algebriche

$$-\omega^2 m_1 x + i\omega A y + K_1 x = 0,$$

$$-\omega^2 m_2 y - i\omega A x + K_2 y = 0,$$

per cui l'equazione che deve essere risolta dalle frequenze proprie é:

$$(\omega^2 m_1 - K_1)(\omega^2 m_2 - K_2) - \omega^2 A^2 = 0.$$

La soluzione é:

$$\omega_\pm^2 = \frac{m_1 K_2 + m_2 K_1 + A^2 \pm \sqrt{(m_1 K_2 + m_2 K_1 + A^2)^2 - 4\, m_1 m_2 K_1 K_2}}{2\, m_1 m_2}.$$

Problema R.1

1) La relazione che lega il tempo proprio al tempo del riferimento inerziale é:

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{d\tau}{dt} = \cos Kt,$$

da cui si ricava facilmente

$$\beta = \sin Kt, \qquad \gamma = \frac{1}{\cos Kt},$$

e β é sempre minore di 1 nell'intervallo temporale assegnato.

2) Conoscendo la velocitá come funzione del tempo é semplice procedere all'integrazione, e assumendo che la posizione iniziale coincida con l'origine del sistema di riferimento inerziale, posto $x(0) = 0$, si ottiene

$$x(t) = \frac{c}{K}(1 - \cos Kt).$$

3) Laccelerazione nel riferimento inerziale di partenza si ottiene semplicemente derivando la velocitá rispetto al tempo::

$$a(t) = c\, K \cos Kt.$$

L'accelerazione nel riferimento di quiete istantanea si ottiene dall'invarianza della norma della quadriaccelerazione, che per i moti in una dimensione si riduce alla condizione

$$a_0 = \gamma^3 a = \frac{c\, K}{\cos^2 Kt} = \frac{c\, K}{1 - K^2\tau^2}.$$

Problema R.2

Se il lato del quadrato vale L nel riferimento di quiete, le immagini dei due vertici del quadrato agli estremi del lato piú vicino all'osservatore giungono dalla stessa distanza, quindi sono state emesse allo stesso istante e appaiono provenire da una distanza che, per effetto della contrazione dei regoli, vale $L\sqrt{1-\beta^2}$.

Viceversa la luce proveniente dai vertici piú lontani ha dovuto percorrere una maggior distanza L, e ha quindi impiegato un maggior tempo L/c, partendo quando il quadrato non si trovava nella posizione di minima distanza, ma in una posizione arretrata della quantitá $L\beta$.

Notiamo ora che $L\beta$ é la proiezione lungo la direzione del moto di un segmento di lunghezza L inclinato rispetto alla direzione ortogonale al moto di un angolo θ tale che $\sin\theta = \beta$, mentre $L\sqrt{1-\beta^2}$ é la proiezione lungo la direzione del moto di un sgmento di lunghezza L ortogonale al precedente.

L'immagine osservata é quindi quella di un quadrato di lato L ruotato di un angolo θ.

Problema S.1

1) Per il calcolo dell'entropia utilizziamo la relazione differenziale

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p\,dV}{T},$$

notando che vale

$$dU = \frac{3}{2}n\,R\,dT + a\frac{n^2}{V^2}dV,$$

$$p\,dV = \frac{n\,R\,T}{V - n\,b}dV - a\frac{n^2}{V^2}dV,$$

per cui risulta semplicemente

$$dS = \frac{3}{2}n\,R\,\frac{dT}{T} + \frac{n\,R}{V - n\,b}dV,$$

e integrando si ottiene, a meno di una costante

$$S = \frac{3}{2}n\,R\,\ln T + n\,R\ln(\frac{V}{n} - b),$$

e ricordando la realzione tra energia e temperatura otteniamo, sempre a meno di una costante

$$S = \frac{3}{2}n\,R\,\ln(\frac{U}{n} + a\frac{n}{V}) + n\,R\ln(\frac{V}{n} - b).$$

2) Nell'espressione dell'entropia possiamo eliminare ora la temperatura in favore della pressione utilizzando l'equazione di stato. Il risultato é

$$S = \frac{3}{2}n\,R\,\ln(p + a\frac{n^2}{V^2}) + \frac{5}{2}n\,R\ln(\frac{V}{n} - b).$$

Poiché le adiabatiche reversibili sono trasformazioni a entropia costante, l'equazione delle adiabatiche si ottiene semplicemente imponendo il vincolo della costanza di S, per cui vale

$$(p + a\frac{n^2}{V^2})(V - n\,b)^\gamma = K.$$

Noti p_1, V_1 e V_2, si ricava p_2 dalla relazione

$$p_2 + a\frac{n^2}{V_2^2} = \Big(p_1 + a\frac{n^2}{V_1^2}\Big)\Big(\frac{V_1 - n\,b}{V_2 - n\,b}\Big)^{\gamma}.$$

A questo punto si puó anche calcolare T_1 e T_2 dall'equazione di stato.

Nella trasformazione adiabatica per il primo principio il lavoro compiuto é esattamente l'opposto della variazione di energia interna, per cui risulta semplicemente

$$W = \frac{3}{2}n\,R(T_1 - T_2) - an^2\big(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\big) =$$

$$\frac{3}{2}(p_1 + a\frac{n^2}{V_1^2})(V_1 - n\,b)\Big[1 - \Big(\frac{V_1 - n\,b}{V_2 - n\,b}\Big)^{\gamma-1}\Big] - an^2\big(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\big).$$

3) L'energia libera si ricava immediatamente dall'espressione dell'energia interna e dell'entropia, e il risultato é

$$F(T,\,V) = \frac{3}{2}n\,R\,T - \frac{3}{2}n\,R\,T\,\ln T - n\,R\,T\,\ln(\frac{V}{n} - b) - a\frac{n^2}{V}.$$

La condizione di convessitá é una condizione di negativitá della derivata seconda di F rispetto al volume. La condizione limite sulla temperatura é quella per cui in un solo punto la derivata seconda é uguale a zero, e il punto é quindi un massimo della derivata seconda.

Richiediamo l'annullarsi della derivata seconda e terza dell'energia libera:

$$-2\,a\frac{n^2}{V^3} + \frac{n\,R\,T}{(V - n\,b)^2} = 0,$$

$$6\,a\frac{n^2}{V^4} - 2\frac{n\,R\,T}{(V - n\,b)^3} = 0.$$

La soluzione di questo sistema é

$$V_c = 3\,n\,b, \qquad\qquad R\,T_c = \frac{8}{27}\frac{a}{b}.$$

Problema S.2

Dal differenziale dell'entropia ricaviamo

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = \sigma', \qquad\qquad \frac{p}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} = \sigma - \frac{U}{V}\sigma'.$$

Risulta quindi anche

$$T = \frac{1}{\sigma'}, \qquad\qquad p = \frac{\sigma}{\sigma'} - \frac{U}{V},$$

e di conseguenza

$$G = U + \frac{\sigma}{\sigma'}V - U - \frac{\sigma}{\sigma'}V = 0.$$

Il risultato si interpreta facilmente notando che le funzioni di stato sono indipendenti da N e quindi il potenziale chimico $\mu = G/N$ deve necessariamente annullarsi.