MECCANICA CLASSICA- Prova scritta - A.A. 2010/2011
Sessione estiva - Secondo appello
Lunedì 18 luglio 2011 - ore 9

La prova consiste nei problemi **A.1, R.1, S.1**. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Il recupero della prima prova in itinere consiste nei problemi **A.1, A.2**. Il recupero della seconda prova in itinere consiste nei problemi **R.1, R.2**. Il recupero della terza prova in itinere consiste nei problemi **S.1, S.2**. Il tempo a disposizione per ciascuna prova è di due ore.

La prova scritta di Fisica aIII consiste nei problemi **A.1, A.2, R.1**. Il tempo a disposizione è di tre ore. La prova scritta di Fisica aIV consiste nei problemi **S.1, S.2**. Il tempo a disposizione è di due ore.

Problema A.1

Una semplice ruota panoramica è costituita da una massa m appesa a un'asta di lunghezza L il cui punto di sospensione si trova su un cerchio di raggio R disposto verticalmente e posto in rotazione dalla discesa di una massa M appesa a un filo inestensibile avvolto intorno al bordo del cerchio.

1) Scrivere la Lagrangiana del sistema.

2) Ricavare le equazioni del moto.

3) Determinare la relazione che deve intercorrere tra M e m affinché possa esistere una posizione di equilibrio e determinare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno all'equilibrio.

Problema A.2

Si consideri il sistema descritto dalla Lagrangiana (con A, B, e D costanti):

$$L = \frac{1}{2}A\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}B\,\dot{y}^2 + \dot{x}\,\dot{C}(y) + D\,x + E(y).$$

1) Dimostrare che è possibile effettuare un cambio di variabili tale per cui la nuova Lagrangiana si decompone in due parti di cui una descrive un moto uniformemente accelerato e l'altra dipende soltanto da y e $\dot{y}$.

2) Scrivere l'equazione del moto per la variabile y.

Problema R.1

Un'astronave che viaggia nella direzione dell'asse x con velocità costante v passa alla minima distanza dalla Terra all'istante terrestre $t = 0$, e in quell'istante si trova a una distanza y_0 nella direzione y. All'istante $t = 0$ viene inviato da Terra un segnale elettromagnetico all'astronave, che appena lo riceve lo rinvia a Terra.

1) A quale tempo terrestre T l'astronave riceverà il segnale?

2) Nel riferimento terrestre, quale angolo θ_i deve formare il segnale con l'asse x per poter giungere all'astronave?

3) Con quali angoli θ'_i e θ'_f viene rispettivamente ricevuto e rinviato il segnale nel riferimento dell'astronave?

Problema R.2

1) Nel problema precedente, mostrare che il risultato ottenuto per θ'_f è coerente con il valore della posizione della Terra lungo l'asse x' misurato nel sistema di riferimento dell'astronave al momento del ricevimento a Terra del segnale di ritorno.

2) Se il segnale è emesso da Terra con frequenza ν e viene rinviato alla stessa frequenza con cui è stato ricevuto, con quale frequenza giunge a Terra il segnale di ritorno?

Problema S.1

Un gas di van der Waals è caratterizzato dall'equazione di stato

$$\big(p + a\frac{n^2}{V^2}\big)(V - n\,b) = n\,R\,T,$$

dove n é il numero delle moli, a e b sono costanti caratteristiche del gas, R è la costante dei gas.

L'energia libera, per un gas di van der Waals monoatomico, vale

$$F(T,\,V) = \frac{3}{2}n\,R\,T - \frac{3}{2}n\,R\,T\ln T - n\,R\,T\ln(\frac{V}{n} - b) - a\frac{n^2}{V}.$$

Per temperature inferiori alla temperatura critica l'energia libera non è una funzione convessa del volume, come invece dovrebbe essere per argomenti termodinamici generali. La costruzione di Maxwell pone rimedio a questo problema, per ogni valore fissato di T, sostituendo la funzione determinata in precedenza con la funzione, lineare nel volume, che corrisponde alla retta tangente alla funzione in due punti, in modo tale da lasciare tutta la funzione al di sotto della retta stessa; la sostituzione si applica tra i due punti di tangenza.

1) Mostrare che, per effetto di questa sostituzione, l'isoterma è parzialmente sostituita nel piano $(p,\,V)$ da un segmento orizzontale tale per cui l'area delle due lunette comprese tra il segmento e l'isoterma descritta dalla funzione originaria è esattamente uguale.

2) Mostrare che, come conseguenza del risultato precedente, poiché nell'intevallo indicato $p = p(T)$ (curva di coesistenza), ne consegue necessariamente che nello stesso intevallo l'energia interna, per valori fissati di T, cresce linearmente col volume.

3) Mostrare che la costruzione di Maxwell corrisponde esattamente a imporre che, a pressione e temperatura fissate, il potenziale chimico nella fase liquida coincida con il potenziale chimico nella fase gassosa.

Problema S.2

Si consideri un gas perfetto costituito da N molecole costituite da coppie di atomi identici di massa m distanti d l'uno dall'altro. Il gas è confinato all'interno di un quadrato (bidimensionale) di lato L

1) Utilizzando le proprietà della distribuzione microcanonica calcolare il peso statistico del gas e l'entropia, per un valore assegnato E dell'energia.

2) Utilizzando la distribuzione canonica calcoltare la funzione di partizione, l'energia libera e l'energia interna, verificando la coerenza con il risultato precedente.