MECCANICA CLASSICA - Prova scritta - A.A. 2010/2011
Sessione estiva - Secondo appello
Lunedì 18 luglio 2011 - ore 9

SOLUZIONI

Problema A.1

Scegliamo come coordinate generalizzate l'angolo ϕ formato dal raggio passante per il punto di sospensione dell'asta con l'asse x e l'angolo θ formato dall'asta con la verticale.

1) Se x e y sono le coordinate cartesiane di m (misurate dal centro del cerchio) valgono le relazioni

$$x = R\,\cos\phi + L\,\sin\theta, \qquad\qquad y = R\,\sin\phi - L\,\cos\theta,$$

mentre per la posizione (lungo la verticale) di M vale $z = K + R\,\phi$, dove K è una costante irrilevante.

Si può quindi ottenere subito la Lagrangiana del sistema nella forma $L = T - V$ dove

$$T = \frac{1}{2}m[R^2\dot{\phi}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2\,R\,L\,\dot{\phi}\,\dot{\theta}\,\sin(\theta - \phi)] + \frac{1}{2}M\,R^2\dot{\phi}^2,$$

$$V = m\,g[R\,\sin\phi - L\,\cos\theta] + M\,g\,R\,\phi.$$

2) Le equazioni del moto si ricavano notando che vale

$$\frac{d}{dt}\Big[(m+M)R^2\dot{\phi} + m\,R\,L\,\dot{\theta}\,\sin(\theta-\phi)\Big] = -m\,R\,L\,\dot{\theta}\,\dot{\phi}\,\cos(\theta-\phi) - m\,g\,R\,\cos\phi - M\,g\,R,$$

$$\frac{d}{dt}\Big[m\,L^2\,\dot{\theta} + m\,R\,L\,\dot{\phi}\,\sin(\theta-\phi)\Big] = m\,R\,L\,\dot{\theta}\,\dot{\phi}\,\cos(\theta-\phi) - m\,g\,L\,\sin\theta.$$

Risulta quindi, semplificando:

$$(m+M)R\,\ddot{\phi} + m\,L\,\ddot{\theta}\,\sin(\theta-\phi) + m\,L\,\dot{\theta}^2\cos(\theta-\phi) = -m\,g\,\cos\phi - M\,g,$$

$$m\,L\,\ddot{\theta} + m\,R\,\ddot{\phi}\,\sin(\theta-\phi) - m\,R\,\dot{\phi}^2\cos(\theta-\phi) = -m\,g\,\sin\theta.$$

Può essere interessante notare che da queste relazioni si ricava la seguente forma alternativa delle equazioni del moto:

$$m\left[\frac{d^2}{dt^2}(R\,\cos\phi + L\,\sin\theta)\right] = \frac{M\,(R\,\ddot{\phi} + g)}{\cos(\theta-\phi)}\sin\theta,$$

$$m\left[\frac{d^2}{dt^2}(R\,\sin\phi - L\,\cos\theta) + g\right] = -\frac{M\,(R\,\ddot{\phi} + g)}{\cos(\theta-\phi)}\cos\theta$$

di semplice interpretazione fisica e utile per lo studio del limite $M \to 0$.

3) Le condizioni di equilibrio statico che si ottengono dalla minimizzazione dell'energia potenziale sono semplicemente

$$M + m\,\cos\phi_0 = 0, \qquad\qquad \sin\theta_0 = 0.$$

Come fisicamente intuitivo, l'equilibrio è quindi possibile soltanto se $M \le m$, e in tal caso all'equilibrio vale $\theta_0 = 0$, mentre per ϕ_0 sono possibili due soluzioni, corrispondenti ai due segni di $\sin\phi_0$. Il segno positivo, come vedremo, corrisponde a un caso di equilibrio instabile, mentre il segno negativo corrisponde all'equilibrio stabile, intorno al quale sono possibili piccole oscillazioni.

Posto $\phi' \equiv \phi - \phi_0$, le equazioni del moto nel limite di piccole oscillazioni diventano:

$$(m+M)R\,\ddot{\phi}' \mp \sqrt{m^2-M^2}\,L\,\ddot{\theta} = \pm\sqrt{m^2-M^2}\,g\,\phi'$$

$$m\,L\,\ddot{\theta} \mp \sqrt{m^2-M^2}\,R\,\ddot{\phi}' = -m\,g\,\theta.$$

Di conseguenza l'equazione per le frequenze proprie prende la forma

$$[(m+M)\,R\,\omega^2 \pm \sqrt{m^2-M^2}\,g][m\,L\,\omega^2 - m\,g] - (m^2-M^2)\,R\,L\,\omega^4 = 0,$$

che si riduce a

$$\frac{M}{m}\omega^4 - \frac{g}{L}\Big(1 \mp \frac{L}{R}\sqrt{\frac{m-M}{m+M}}\Big)\omega^2 \mp \frac{g^2}{R\,L}\sqrt{\frac{m-M}{m+M}} = 0$$

e ammette le soluzioni

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{M}\frac{g}{L}\Big[1 \mp \frac{L}{R}\sqrt{\frac{m-M}{m+M}} \pm \sqrt{\Big(1 \mp \frac{L}{R}\sqrt{\frac{m-M}{m+M}}\Big)^2 \pm 4\frac{M}{m}\frac{L}{R}\sqrt{\frac{m-M}{m+M}}}\Big].$$

Si verifica immediatamente che soltanto la scelta del segno negativo per $\sin\phi_0$ porta a soluzioni che siano entrambe reali positive.

Problema A.2

1) Ricaviamo innanzitutto i momenti coniugati, notando che $\dot{C}(y) \equiv \dot{y}\,C'$:

$$p_x = A\,\dot{x} + \dot{C}(y) = \frac{d}{dt}[A\,x + C(y)], \qquad\qquad p_y = B\,\dot{y} + \dot{x}\,C'(y),$$

dove l'apice indica derivazione rispetto alla variabile y.

Di conseguenza le equazioni del moto prendono la forma

$$\frac{d^2}{dt^2}[A\,x + C(y)] = D,$$

$$B\,\ddot{y} + \ddot{x}\,C'(y) = E'(y).$$

La prima equazione è immediatamente integrabile, mentre nella seconda si potrebbe sostituire $\ddot{x}$ ricavandolo dallla prima equazione e di conseguenza ottenere direttamente un'equazione per la sola variabile y.

2) La forma di p_x suggerisce immediatamente il passaggio a una nuova variabile z definita dalla relazione

$$z = x + \frac{C(y)}{A}, \qquad x = z - \frac{C(y)}{A}.$$

Sostituendo nella Lagrangiana si ottiene quindi

$$L = \frac{1}{2} A\,\dot{z}^2 + D\,z + \frac{1}{2} B\,\dot{y}^2 - \frac{1}{2}\frac{\dot{C}^2}{A} - \frac{C\,D}{A} + E,$$

come si doveva dimostrare.

In particolare dai termini dipendenti da z si ottiene subito la prima equazione del moto, mentre la seconda equazione diventa:

$$\left(A\,B - C'^2\right)\ddot{y} - C'C''\,\dot{y}^2 = A\,E' - C'D,$$

e coincide con quanto si sarebbe ottenuto per sostituzione diretta.

Problema R.1

1) Nel riferimento terrestre l'astronave si sposta lungo una retta parallela all'asse x percorrendo una distanza $v\,T$ prima di essare raggiunta dal segnale, che deve quindi nello stesso tempo percorrere alla velocità della luce una distanza

$$\sqrt{y_0^2 + v^2T^2} = c\,T.$$

Risolvendo per T si ricava

$$T = \frac{y_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} \equiv \gamma(v)\frac{y_0}{c}.$$

2) Sulla base del risultato precedente, poiché lo spostamento dell'astronave nella direzione x vale $v\,T$, risulta immediatamente

$$\tan\theta_i = \frac{y_0}{v\,T} \equiv \frac{c}{\gamma\,v},$$

da cui anche

$$\sin\theta_i = \frac{1}{\gamma}, \qquad \cos\theta_i = \frac{v}{c}.$$

Nel riferimento terrestre il segnale di ritorno segue in verso opposto il percorso del segnale iniziale.

3) Nel riferimento dell'astronave la coordinata x' dell'astronave resta costantemente uguale a 0, mentre all'istante $t = t' = 0$ in cui viene emesso il segnale anche la Terra si trova in $x' = 0$. Di conseguenza vale banalmente

$$\sin\theta'_i = 1, \qquad \cos\theta'_i = 0.$$

Per quanto riguarda il segnale di ritorno, basterà applicare le formule dell'aberrazione per ricavare

$$\tan\theta'_f = \frac{c}{2\,v\,\gamma^2},$$

da cui anche

$$\sin\theta'_f = -\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}, \qquad \cos\theta'_f = -2\frac{v}{c}\frac{1}{1+\frac{v^2}{c^2}}.$$

Problema R.2

1) Notiamo che nel riferimento dell'astronave i percorsi dei due segnali e quello della Terra formano un triangolo rettangolo la cui ipotenusa misura $c\,T'_f$ mentre i cateti valgono rispettivamente $c\,T'_i$ e $v(T'_i + T'_f)$.

Applicando il teorema di Pitagora si ottiene quindi

$$v^2(T'_i + T'_f)^2 + c^2(T'_i)^2 = c^2(T'_f)^2,$$

e scegliendo l'unica soluzione positiva dell'equazione si ricava

$$\frac{T'_i}{T'_f} = \frac{c^2 - v^2}{c^2 + v^2} = -\sin\theta'_f, \qquad \frac{v}{c}\big(1 + \frac{T'_i}{T'_f}\big) = -\cos\theta'_f,$$

come si doveva dimostrare.

2) Scriviamo il quadrivettore d'onda iniziale nel riferimento terrestre:

$$K_i = (\nu,\, \nu\,\cos\theta_i,\, \nu\,\sin\theta_i,\, 0),$$

da cui ricaviamo con una trasformazione di Lorentz

$$K'_i = (\frac{\nu}{\gamma},\, \frac{\nu}{\gamma},\, 0,\, 0),$$

coerente con i risultati precedenti.

Il segnale di ritorno sarà quindi descritto, nel riferimento dell'astronave, dal quadrivettore

$$K'_f = (\frac{\nu}{\gamma},\, \frac{\nu}{\gamma}\cos\theta'_f,\, \frac{\nu}{\gamma}\sin\theta'_f,\, 0).$$

Effettuando ora la trasformazione di Lorentz inversa della precedente otteniamo

$$K_f = (\nu_f,\, \nu_f\,\cos\theta_f,\, \nu_f\,\sin\theta_f,\, 0),$$

dove l'angolo θ_f è quello opposto a θ_i, come previsto, e vale

$$\nu_f = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}\nu.$$

Problema S.1

1) Ricordiamo innanzitutto che vale in generale la relazione

$$p = -\frac{\partial F(V,T)}{\partial V}.$$

Notiamo poi che la retta che, per un valore fissato di T, al variare di V risulta tangente alla funzione assegnata $F(T,V)$ in due punti deve avere un coefficiente angolare coincidente con il valore della derivata della funzione nei punti di contatto, che corrisponderanno ai volumi indicati come V_1 e V_2, e per quanto sopra indicato tale derivata, a meno del segno, coincide con la pressione del sistema, che resta quindi costante nell'intervallo in cui la funzione è sostituita dalla retta, e vale:

$$p = -\frac{\partial F(V_1,T)}{\partial V} = -\frac{\partial F(V_2,T)}{\partial V} = p(T).$$

Ma notiamo che il coefficiente angolare della retta può essere calcolato anche direttamente a partire dall'espressione che rappresenta la funzione F(T,V), mediante la relazione geometrica

$$-p = \frac{F(V_2,T) - F(V_1,T)}{V_2 - V_1}.$$

Poiché il differenziale di $F(T,V)$ vale $dF = -S\,dT - p\,dV$ ne segue immediatamente che il lavoro compiuto in una trasformazione isoterma reversibile che segua l'isoterma determinata dall'equazione di stato soddisfa le relazioni

$$\int_{V_1}^{V_2} p\,dV = F(V_1,T) - F(V_2,T) = p(V_2 - V_1),$$

che è quanto si doveva dimostrare, dal momento che le due lunette si trovano sui due lati della curva $p(T,V)$ e di conseguenza contribuiscono con segni opposti all'integrale, e poiché il contributo netto risulta nullo le aree delle due lunette devono essere identiche.

2) La relazione che lega l'energia interna all'energia libera è:

$$U = F + T\,S = F - T\frac{\partial F}{\partial T}.$$

Calcoliamo ora la derivata dell'energia rispetto al volume per valori fissati di T nell'intervallo in cui la funzione F è sostituita dalla retta:

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{\partial F}{\partial V} - T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right) = -p(T) + T\,\frac{dp(T)}{dT},$$

da cui risulta evidente che la derivata dell'energia rispetto al volume dipende solo dalla temperatura ed è indipendente da V, e pertanto nell'intervallo indicato l'energia è una funzione lineare del volume.

3) Il differenziale della funzione di Gibbs $G = U + p\,V - T\,S$ vale $dG = -V\,dp - S\,dT$ e di conseguenza lungo l'isoterma, poiché anche la pressione per ipotesi resta costante, deve valere $dG = N\,d\mu = 0$, ossia anche

$$\mu(V_1, T) = \mu(V_2, T),$$

dove il primo valore è il potenziale chimico mella fase liquida e il secondo valore è il potenziale chimico nella fase gassosa.

Ma notiamo che vale anche $dG = dF + p\,dV + V\,dp$, e poiché lungo l'isoterma la pressione non varia deve risultare

$$F(V_2, T) - F(V_1, T) + p(V_2 - V_1) = 0,$$

che come abbiamo visto è esattamente la condizione implicata dalla costruzione di Maxwell.

Problema S.2

1) Conviene innanzitutto definire la massa totale della molecola $M = 2\,m$ e il suo momento d'inerzia $I = \frac{1}{2} m\,d^2$. In termini di queste quantità e dei momenti coniugati l'Hamiltoniana della singola molecola si scrive

$$H = \frac{p_x^2}{2\,M} + \frac{p_y^2}{2\,M} + \frac{p_\theta^2}{2\,I},$$

dove in particolare $p_\theta = I\,\dot{\theta}$.

Il peso statistico del sistema quando l'energia totale vale E è dato dall'espressione:

$$\Gamma = \frac{1}{N!}\frac{1}{h^{3N}}\Big(\int dx\,dy\,d\theta\Big)^N \prod_i \int dp_{xi}\,dp_{yi}\,dp_{\theta i} = \frac{1}{N!}\big(\frac{2\,\pi\,L^2}{h^3}\big)^N (2ME)^N (2IE)^{\frac{N}{2}} \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\frac{3N}{2}!}.$$

Usando la formula di Stirling si ottiene quindi

$$\ln\Gamma = N\big[\ln\frac{L^2}{N} + \frac{3}{2}\ln\frac{E}{N} + \frac{1}{2}\ln\frac{M^2 I}{2\pi} + 3\ln\frac{2\pi}{h} + \frac{5}{2}\big].$$

Di conseguenza l'entropia vale

$$S(L, E) = Nk\big[\ln\frac{L^2}{N} + \frac{3}{2}\ln\frac{E}{N} + S_0\big],$$

dove S_0 è una costante.

Si può ricavare anche la relazione tra energia e temperatura grazie alla relazione

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{3}{2}\frac{Nk}{E}.$$

2) Come in tutti i casi di Hamiltoniane per sistemi non interagenti vale la relazione

$$Q_N = \frac{1}{N!} Q_1^N,$$

dove

$$Q_1 = \frac{1}{h^3} \int dx\, dy\, d\theta \int dp_x dp_y d\theta\, e^{-\beta H} = 2\pi L^2 \Big(\frac{2\pi M}{\beta h^2}\Big)\Big(\frac{2\pi I}{\beta h^2}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Da quest'espressione si ricava immediatamente l'energia libera nella forma

$$F = -NkT\Big[\ln \frac{L^2}{N} + \frac{3}{2}\ln kT + \frac{1}{2}\ln \frac{M^2 I}{2\pi} + 3\ln \frac{2\pi}{h} + 1\Big].$$

Si ottiene facilmente anche l'energia interna grazie alla relazione

$$E = F - T\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{3}{2}NkT.$$

coincidente con il risultato precedente. Si verifica facilmente che anche l'entropia $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ coincide con il risultato precedente.