**MECCANICA CLASSICA- Prova scritta - A.A. 2010/2011**
**Sessione autunnale - Primo appello**
Venerdì 9 settembre 2011 - ore 9

La prova d'esame consiste in un problema a scelta di tipo **A**, il problema **R.1** e un problema a scelta di tipo **S**. Il tempo a disposizione è di tre ore.

Il recupero della prima prova in itinere consiste nei due problemi di tipo **A**, quello della seconda prova consiste nei due problemi di tipo **R**, quello della terza prova consiste nei due problemi di tipo **S**. Il tempo a disposizione per ciascuna prova è di due ore.

La prova di Fisica aIII consiste nei problemi **A.1, A.2, R.1**. Il tempo a disposizione è di tre ore. La prova di Fisica aIV consiste nei problemi **S.1, S.2**. Il tempo a disposizione è di due ore.

Problema A.1

Un pendolo a sospensione mobile è costituito da una massa $m$ appesa a un'asta di lunghezza $L$ il cui punto di sospensione è fissato al bordo di un disco omogeneo di raggio $R$ e massa $2M$, disposto verticalmente e in grado di ruotare intorno a un asse perpendicolare al disco e passante per il suo centro.

1) Scrivere la Lagrangiana del sistema.

2) Ricavare le equazioni del moto.

3) Determinare la posizione di equilibrio e le frequenze proprie delle piccole oscillazioni.

Problema A.2

Un corpo di massa $m$, libero di muoversi in tre dimensioni, è soggetto a un campo di forze derivanti da un'energia potenziale la cui espressione è

$$V(x, y, z) = K(3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 3xy + 3xz + 9yz).$$

1) Calcolare le frequenze proprie delle oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio.

2) Il sistema, oltre alla conservazione dell'energia totale, ammette un altro integrale primo del moto. Anche sulla base dei risultati precedenti determinarne la forma esplicita e giustificare fisicamente il risultato.

Problema R.1

Una particella relativistica di massa $M$ dotata di energia $E$ collide elasticamente con una particella ferma di massa $m$.

1) Nel caso di collisione frontale, calcolare quanto vale l'energia $E'$ della particella incidente dopo l'urto.

2) Nel caso in cui, dopo la collisione, le due particelle abbiano impulso uguale in modulo, calcolare l'energia $E'$ della particella incidente dopo l'urto.

3) Determinare gli angoli di diffusione delle due particelle nel caso della domanda 2) e dimostrare che per $M > 3m$ esiste un valore minimo di $E$ al di sotto del quale il processo indicato non è possibile.

Problema R.2

Si consideri un processo di collisione elastica tra una particella di massa nulla e una di massa $m$ (quale ad esempio l'effetto Compton), per cui vale la relazione quadrivettoriale $p + k = p' + k'$. Avendo definito il quadrivettore $r^\mu = p^\mu + p'^\mu$, si considerino i seguenti quattro quadrivettori:

$$Q^\mu \equiv p^\mu - p'^\mu = k'^\mu - k^\mu, \qquad K^\mu \equiv k^\mu + k'^\mu,$$

$$P^\mu \equiv r^\mu - \frac{rK}{K^2} K^\mu, \qquad N^\mu \equiv \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu Q_\rho K_\sigma.$$

1) Si dimostri che i quadrivettori $Q$, $K$, $P$, $N$ sono tutti tra loro ortogonali.

2) Si dimostri che $P$ ed $N$ sono ortogonali a $k$ e $k'$.

3) Si individui quali tra i quattro quadrivettori sono di genere spazio e quali sono di genere tempo.

Problema S.1

Un sistema è costituito da $N$ particelle distinguibili di massa $m$ dotate di tre gradi di libertà ma soggette a forze di richiamo corrispondenti per ciascuna di esse all'esistenza di un'energia potenziale della forma $V(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r}^2)^2$, dove $\mathbf{r}$ è la distanza dall'equilibrio.

1) Calcolare la funzione di partizione canonica e l'energia libera $F$, utilizzando anche la costante $C$ definita dalla relazione

$$C = \int_0^\infty x^2 e^{-x^4} dx \approx 0,306...$$

2) Calcolare l'energia interna e la capacità termica a volume costante.

3) Calcolare la funzione di partizione grancanonica.

Problema S.2

Si consideri un sistema di $N$ particelle per le quali siano possibili soltanto quattro livelli energetici, caratterizzati da due scale molto diverse di energia, per cui valga $\Delta\epsilon << \epsilon$, e i livelli siano rispettivamente $-\epsilon - \Delta\epsilon,\ -\epsilon + \Delta\epsilon,\ \epsilon - \Delta\epsilon,\ \epsilon + \Delta\epsilon$.

1) S calcoli la funzione di partizione del sistema nel formalismo canonico.

2) Si calcoli l'energia interna in funzione della temperatura $T$ e dei parametri dati.

3) Si mostri che dal punto di vista termodinamico i gradi di libertà associati alle differenze di energia $\Delta\epsilon$ risultano disaccoppiati da quelli associati alle differenze di energia $\epsilon$ e si discuta in quale limite per le temperature l'effetto delle differenze "piccole" è più sensibile rispetto all'effetto delle differenze "grandi".