MECCANICA CLASSICA - Prova scritta - A.A. 2010/2011
Sessione autunnale - Primo appello
Venerdì 9 settembre 2011 - ore 9

SOLUZIONI

Problema A.1

Scegliamo come coordinate l'angolo ϕ formato dal raggio passante per il punto di sospensione dell'asta con l'asse y negativo e l'angolo θ formato dall'asta con la verticale, e ricordiamo che il momento d'inerzia di un disco di massa $2M$ e raggio R vale MR^2.

1) Se x e y sono le coordinate cartesiane di m (misurate dal centro del cerchio) valgono le relazioni

$$x = R\,\sin\phi + L\,\sin\theta, \qquad y = -R\,\cos\phi - L\,\cos\theta.$$

Si può quindi ottenere subito la Lagrangiana del sistema nella forma $L = T - V$ dove

$$T = \frac{1}{2}m[R^2\dot\phi^2 + L^2\dot\theta^2 + 2\,R\,L\,\dot\phi\,\dot\theta\,\cos(\theta-\phi)] + \frac{1}{2}MR^2\dot\phi^2,$$

$$V = -m\,g[R\,\cos\phi + L\,\cos\theta].$$

2) Le equazioni del moto si ricavano notando che vale

$$\frac{d}{dt}\Big[(m+M)R^2\dot\phi + m\,R\,L\,\dot\theta\,\cos(\theta-\phi)\Big] = m\,R\,L\,\dot\theta\,\dot\phi\,\sin(\theta-\phi) - m\,g\,R\,\sin\phi,$$

$$\frac{d}{dt}\Big[m\,L^2\,\dot\theta + m\,R\,L\,\dot\phi\,\cos(\theta-\phi)\Big] = -m\,R\,L\,\dot\theta\,\dot\phi\,\sin(\theta-\phi) - m\,g\,L\,\sin\theta.$$

Risulta quindi, semplificando:

$$(m+M)R\,\ddot\phi + m\,L\,\ddot\theta\,\cos(\theta-\phi) - m\,L\,\dot\theta^2\sin(\theta-\phi) = -m\,g\,\sin\phi$$

$$m\,L\,\ddot\theta + m\,R\,\ddot\phi\,\cos(\theta-\phi) + m\,R\,\dot\phi^2\sin(\theta-\phi) = -m\,g\,\sin\theta.$$

Può essere interessante notare che da queste relazioni si ricava la seguente forma alternativa delle equazioni del moto:

$$m\Big[\frac{d^2}{dt^2}(R\,\sin\phi + L\,\sin\theta)\Big] = -\frac{M\,R\,\ddot\phi}{\sin(\theta-\phi)}\,\sin\theta,$$

$$m\Big[\frac{d^2}{dt^2}(R\,\cos\phi + L\,\cos\theta) - g\Big] = -\frac{M\,R\,\ddot\phi}{\sin(\theta-\phi)}\,\cos\theta$$

di semplice interpretazione fisica e utile per lo studio del limite $M \to 0$.

3) Le condizioni di equilibrio statico che si ottengono dalla minimizzazione dell'energia potenziale sono semplicemente

$$\sin\phi_0 = 0, \qquad\qquad \sin\theta_0 = 0,$$

e l''equilibrio stabile si ha quindi solo quando $\theta_0 = \phi_0 = 0$.

Le equazioni del moto nel limite di piccole oscillazioni diventano quindi:

$$(m+M)R\,\ddot\phi + m\,L\,\ddot\theta = -m\,g\,\phi$$

$$m\,L\,\ddot\theta + m\,R\,\ddot\phi = -m\,g\,\theta.$$

Di conseguenza, definendo per comodità le quantità ausiliarie

$$\omega_L^2 = \frac{g}{L}, \qquad\qquad \omega_R^2 = \frac{m}{m+M}\frac{g}{R},$$

l'equazione per le frequenze proprie prende la forma

$$(m+M)(\omega_R^2 - \omega^2)(\omega_L^2 - \omega^2) - m(\omega^2)^2,$$

che si riduce a

$$\frac{M}{m+M}(\omega^2)^2 - (\omega_R^2 + \omega_L^2)\,\omega^2 + \omega_R^2\,\omega_L^2 = 0$$

e ammette le soluzioni

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\big(1 + \frac{m}{M}\big)\Big[\omega_R^2 + \omega_L^2 \pm \sqrt{(\omega_R^2 + \omega_L^2)^2 - \frac{4M}{m+M}\omega_R^2\,\omega_L^2}\Big].$$

Problema A.2

1) Il problema della determinazione delle frequenze proprie del sistema si riduce in questo caso, grazie al fatto che la matrice T_{ij} è proporzionale all'identità, al problema della diagonalizzazione della matrice V_{ij} associata alla forma quadratica $V(x,y,z)$.

Posto $\omega_0^2 \equiv K/m$, le equazioni del moto possono essere poste nella forma

$$(\omega^2 - 6\,\omega_0^2)x - 3\omega_0^2 y - 3\omega_0^2 z = 0,$$

$$(\omega^2 - 14\,\omega_0^2)y - 3\omega_0^2 x - 9\omega_0^2 z = 0,$$

$$(\omega^2 - 6\,\omega_0^2)z - 3\omega_0^2 x - 9\omega_0^2 y = 0,$$

e ammettono soluzioni non banali quando ω^2 soddisfa l'equazione

$$(\omega^2)^3 - 26\,\omega_0^2(\omega^2)^2 + 105\,(\omega_0^2)^2\omega^2 = 0.$$

Si verifica facilmente che le frequenze proprie sono pertanto:

$$\omega^2 = 21\,\omega_0^2, \qquad\qquad \omega^2 = 5\,\omega_0^2, \qquad\qquad \omega^2 = 0.$$

2) Sostituendo nelle equazioni del moto e sfruttando il fatto che gli autovettori della matrice simmetrica V_{ij} possono essere scelti in modo tale da formare una base ortonormale (e pertanto l'inversa della matrice a_{jl} degli autovettori coincide con la trasposta), possiamo costruire facilmente i modi propri del sistema:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{14}}(x + 3y + 2z), \qquad \eta = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x - y), \qquad \zeta == \frac{1}{\sqrt{35}}(x + 3y - 5z).$$

In termini delle nuove variabili la Lagrangiana prende la forma

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) - \frac{21}{2}K\,\xi^2 - \frac{5}{2}K\,\eta^2.$$

Questa forma della Lagrangiana rende immediatamente evidente il fatto che la coordinata ζ è ciclica e di conseguenza il corrispondente momento coniugato

$$p_\zeta \equiv \frac{1}{\sqrt{35}}(p_x + 3p_y - 5p_z)$$

è un integrale primo del moto.

Il risultato, nel caso specifico, poteva essere dedotto direttamente anche dall'esistenza di un modo proprio a frequenza zero, e la sua interpretazione fisica consiste semplicemente nella constatazione dell'esistenza di una direzione spaziale lungo la quale l'energia potenziale risulta invariante per traslazioni. Tale direzione è appunto quella parametrizzata dalla coordinata ζ.

Problema R.1

1) Le equazioni che devono essere soddisfatte si riducono alla conservazione dell'energia e a quella dell'impulso lungo la direzione iniziale del moto. Indicando con lettere maiuscole le variabili dinamiche associate alla particella di massa M e posto $c = 1$ risulta:

$$E + m = E' + \epsilon', \qquad P = P' + p'.$$

Si possono quindi eliminare le variabili della particella di massa m, scrivendo

$$(E + m - E')^2 - (P - P')^2 = m^2,$$

da cui anche:

$$E\,E' + m(E' - E) - M^2 = P\,P.'$$

Quadrando e semplificando si ottiene poi:

$$(M^2 + m^2)(E' - E)^2 - 2m(M^2 + E\,E')(E' - E) = 0.$$

Eliminando la soluzione banale $E = E'$ si ottiene quindi

$$(M^2 + m^2)(E' - E) + 2m(E\,E' - M^2) = 0,$$

da cui è immediato ricavare

$$E' = \frac{E(M^2 + m^2) + 2mM^2}{M^2 + m^2 + 2mE}, \qquad P' = \sqrt{E^2 - M^2}\,\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2 + 2mE}.$$

2) Nel caso indicato le equazioni che legano le variabili dinamiche sono

$$E + m = E' + \epsilon', \qquad\qquad P' = p',$$

da cui segue anche

$$E - E' = \epsilon' - m, \qquad\qquad E'^2 - M^2 = \epsilon'^2 - m^2,$$

e con semplici manipolazioni si ricava la relazione

$$\frac{E'^2 - M^2}{E - E'} - (E - E') = 2m.$$

Di conseguenza risulta

$$E' = E - \frac{1}{2}\frac{E^2 - M^2}{E + m}, \qquad\qquad \epsilon' = m + \frac{1}{2}\frac{E^2 - M^2}{E + m}.$$

3) Se le particelle nello stato finale hanno impulso uguale in modulo si riconosce facilmente che esse devono formare angoli uguali e opposti in segno rispetto alla direzione del moto iniziale. La relazione che lega l'angolo di diffusione θ alle altre variabili dinamiche è quindi $P = 2P' \cos\theta$, da cui, essendo

$$P' = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(E + 2m)^2 - M^2}}{E + m} P,$$

risulta

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{E^2 - M^2}}{\sqrt{E'^2 - M^2}} = \frac{E + m}{\sqrt{(E + 2m)^2 - M^2}}.$$

Poiché deve essere soddisfatta la condizione $\cos\theta \leq 1$, affinché il processo sia possibile deve valere la disuguaglianza

$$(E + m)^2 \leq (E + 2m)^2 - M^2,$$

che può a sua volta essere ricondotta alla relazione

$$E - M \geq \frac{M + m}{2m}(M - 3m),$$

da cui risulta evidente che per $M > 3m$ esistono valori di E per i quali il processo non è cinematicamente possibile.

Problema R.2

1) Notiamo che vale:

$$QK = k'^2 - k^2 = 0,$$

$$PQ = rQ - \frac{rK}{K^2}QK = rQ = p^2 - p'^2 = 0,$$

$$PK = rK - \frac{rK}{K^2}K^2 = 0,$$

mentre N^μ è banalmente ortogonale agli altri tre quadrivettori per l'antisimmetria di $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

2) Basta notare che

$$k^\mu = \frac{1}{2}(K^\mu - Q^\mu), \qquad k'^\mu = \frac{1}{2}(K^\mu + Q^\mu),$$

per cui l'ortogonalità di P ed N con k e k' discende immedatamente dalla risposta alla domanda precedente.

3) Si noti che la norma di K^μ vale

$$K^2 = (k + k')^2 = 2kk' = 2h^2\nu\nu'(1 - \cos\theta) > 0,$$

quindi K^μ è un quadrivettore di genere tempo.

Di conseguenza gli altri tre quadrivettori, essendo ortogonali a K^μ, sono tutti di genere spazio.

Problema S.1

1) Trattandosi di particelle indipendenti e distinguibili la funzione di partizione canonica soddisfa la relazione

$$Q_N = Q_1^N,$$

dove vale

$$Q_1 = \frac{1}{h^3}\int d^3p\, d^3r\, e^{-\beta \mathbf{p}^2/2m}\, e^{-\beta\,\lambda(\mathbf{r}^2)^2}.$$

Conviene a questo punto effettuare l'integrazione gaussiana e sostituire $x^2 = \sqrt{\beta\lambda}\mathbf{r}^2$ nell'integrale sulle coordinate, ottenendo quindi

$$Q_1 = \frac{1}{h^3}\Big(\frac{2\pi m}{\beta}\Big)^{\frac{3}{2}}\frac{4\pi}{(\beta\lambda)^{\frac{3}{4}}}\int_0^\infty x^2 e^{-x^4}dx = \beta^{-\frac{9}{4}}\Big(\frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}h^2}\Big)^{\frac{3}{2}}4\pi C.$$

Di conseguenza l'energia libera vale

$$F = -NkT\Big[\frac{9}{4}\ln kT + \frac{3}{2}\ln\Big(\frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}h^2}\Big) + \ln(4\pi C)\Big].$$

Si noti che in questo caso l'energia libera risulta indipendente dal volume.

2) Il calcolo dell'energia interna è immediato grazie alla relazione

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q_N = \frac{9}{4} NkT.$$

Pertanto la capacità termica a volume costante vale

$$c_V = \frac{dU}{dT} = \frac{9}{4} Nk.$$

3) La funzione di partizione grancanonica è semplicemente

$$Q_{GC} = \sum_N z^N Q_1^N = \frac{1}{1 - zQ_1}.$$

Problema S.2

1) Nel formalismo canonico la funzione di partizione è data in questo caso dall'espressione $Q = Q_1^N$, dove vale

$$Q_1 = e^{\beta(\epsilon+\Delta\epsilon)} + e^{\beta(\epsilon-\Delta\epsilon)} + e^{-\beta(\epsilon-\Delta\epsilon)} + e^{-\beta(\epsilon+\Delta\epsilon)} = 4\cosh(\beta\epsilon)\cosh(\beta\Delta\epsilon).$$

2) Il calcolo dell'energia interna conduce al risultato

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q_N = -N[\epsilon \tanh \beta\epsilon + \Delta\epsilon \tanh \beta\Delta\epsilon].$$

3) Si noti che in generale per questo sistema vale $U = U_\epsilon + U_{\Delta\epsilon}$.

Nel limite di basse temperature l'energia interna si riduce a $U \approx -N(\epsilon + \Delta\epsilon)$, ossia quasi tutte le particelle si trovano nello stato di minore energia.

Viceversa nel limite di alte temperature vale

$$U \approx -\frac{N}{kT}\left[\epsilon^2 + \Delta\epsilon^2\right],$$

e in questo limite le differenze "piccole" sono più trascurabili rispetto a quelle "grandi".