MECCANICA CLASSICA- Prova scritta - A.A. 2010/2011
Prima prova in itinere
Lunedì 10 Gennaio 2011 - ore 9

La prova consiste nei problemi **A.1, A.2**. Il tempo a disposizione è di due ore.

Problema A.1

Una giostra è costituita da un cerchio di raggio R, disposto orizzontalmente a una certa altezza rispetto al suolo e ruotante intorno a un asse verticale passante per il centro del cerchio stesso. La velocità angolare ω della rotazione è costante nel tempo.

Al bordo del cerchio sono appese per l'estremo superiore aste rigide di massa trascurabile e di lunghezza $l < R$; all'estremo inferiore di ciascuna asta è appesa una massa m.

1) Determinare la Lagrangiana esatta per una di queste masse usando le coordinate del riferimento che ruota con la giostra.

2) Calcolare la posizione di equilibrio dinamico, utilizzando coordinate polari θ e ϕ riferite a un'origine posta nel punto di sospensione dell'asta.

3) Nell'ipotesi semplificatrice per cui le aste sono vincolate a muoversi su piani verticali passanti per il punto di sospensione e per l'asse di rotazione, calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio dinamico. La frequenza potrà essere espressa in funzione dei parametri ω, R/l e $\sin\theta_0$, purché si indichi di quale equazione l'angolo di equilibrio dinamico θ_0 è soluzione.

Problema A.2

Un sistema a un grado di libertà è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}[p + U(q)]^2,$$

dove $U(q)$ è una funzione arbitraria, purché continua e differenziabile, della coordinata generalizzata.

1) Ricavare e risolvere le equazioni canoniche.

2) Mostrare che la trasformazione

$$Q = q, \qquad P = p + U(q)$$

è canonica, applicarla all'Hamiltoniana in esame e interpretare la risposta alla domanda 1) alla luce del risultato ottenuto.