MECCANICA CLASSICA - Prova scritta - A.A. 2009/2010
Prima prova in itinere
Lunedì 10 Gennaio 2011 - ore 9

SOLUZIONI

Problema A.1

1) Esprimendo le coordinate cartesiane della massa m in funzione delle coordinate polari riferite al punto di sospensione dell'asta e al sistema rotante si determinano le relazioni

$$x = R\,\cos\omega t + l\,\sin\theta\,\cos(\omega t + \phi),$$

$$y = R\,\sin\omega t + l\,\sin\theta\,\sin(\omega t + \phi),$$

$$z = -l\,\cos\theta.$$

Il modulo quadro della velocità misurata nel riferimento inerziale vale quindi

$$v^2 = \omega^2 R^2 + l^2\dot\theta^2 + l^2\sin^2\theta(\omega + \dot\phi)^2 + 2\,\omega\,R\,l[\cos\theta\,\sin\phi\,\dot\theta + \sin\theta\,\cos\phi(\omega + \dot\phi)].$$

Trascurando termini costanti e notando che la combinazione $\cos\theta\,\sin\phi\,\dot\theta + \sin\theta\,\cos\phi\,\dot\phi$ è una derivata totale rispetto al tempo possiamo quindi scrivere la Lagrangiana esatta nella forma

$$L = \frac{1}{2}m[l^2\dot\theta^2 + l^2\sin^2\theta(\omega + \dot\phi)^2 + 2\,\omega^2\,R\,l\,\sin\theta\,\cos\phi] + m\,g\,l\,\cos\theta.$$

2) Adottando le coordinate θ e ϕ la condizione di equilibrio dinamico si riduce alla richiesta che le equazioni del moto siano risolte per valori costanti delle coordinate, e tutti i termini contenenti derivate rispetto al tempo si annullino. Deve quindi valere nel caso statico

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = m[\omega^2 l^2\sin\theta\,\cos\theta + \omega^2 R\,l\,\cos\theta\,\cos\phi - g\,l\,\sin\theta] = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\phi} = -m\,\omega^2 R\,l\,\sin\theta\,\sin\phi = 0.$$

La seconda condizione richiede quindi che all'equilibrio stabile valga $\phi_0 = 0$, da cui sostituendo nella prima equazione si ottiene

$$\omega^2\cos\theta_0(l\,\sin\theta_0 + R) - g\,\sin\theta_0 = 0,$$

che per $R > l$ ammette sempre una soluzione nell'intervallo $(0, \pi/2)$.

3) L'ipotesi semplificatrice corrisponde a sostituire $\phi = \dot\phi = 0$ nella Lagrangiana precedente, ottenendo

$$L_0 = \frac{1}{2}m[l^2\dot\theta^2 + l^2\omega^2\sin^2\theta + 2\,\omega^2\,R\,l\,\sin\theta] + m\,g\,l\,\cos\theta.$$

La condizione di equilibrio statico è quindi, come nel caso precedente

$$\frac{\partial L_0}{\partial \theta} = m[\omega^2 l^2 \sin\theta \, \cos\theta + \omega^2 R\, l \, \cos\theta - g\, l \, \sin\theta] = 0.$$

Notando poi che vale

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot\theta} = m\, l^2 \ddot\theta$$

possiamo ricavare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno all'equilibrio calcolando

$$-\frac{\partial^2 L_0}{\partial \theta^2} = m[\omega^2 l^2 \sin^2\theta - \omega^2 l^2 \cos^2\theta + \omega^2 R\, l \, \sin\theta + g\, l \, \cos\theta]$$

al punto di equilibrio θ_0 e dividendo per $m\, l^2$.

Facendo poi uso esplicito dell'equazione che definisce θ_0 per eliminare g è possibile scrivere il risultato per il quadrato della frequenza nella forma

$$\omega^2 \Big[\sin^2\theta_0 + \frac{R}{l}\frac{1}{\sin\theta_0}\Big].$$

Problema A.2

1) Le equazioni canoniche hanno la forma

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p} = p + U(q), \qquad\qquad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} = -[p + U(q)]U'(q),$$

da cui sostituendo la prima nella seconda equazione si ottiene $\dot p = -\dot q\, U'(q) = -\dot U$, e quindi

$$p + U(q) = p_0,$$

dove p_0 è una costante d'integrazione (non coincidente con il valore di p al tempo $t = 0$).

Sostituendo questo risultato nella prima equazione si ottiene poi $\dot q = p_0$, da cui

$$q(t) = q_0 + p_0 t,$$

dove q_0 è la seconda costante d'integrazione, e vale infine

$$p(t) = p_0 - U(q_0 + p_0 t).$$

Si noti peraltro che la Lagrangiana corrispondente all'Hamiltoniana proposta vale

$$L = p\dot q - H = [\dot q - U(q)]\dot q - \frac{1}{2}\dot q^2 = \frac{1}{2}\dot q^2 - U(q)\dot q,$$

dove il secondo termine è una derivata totale rispetto al tempo, per cui la Lagrangiana è in effetti equivalente a $L' = \frac{1}{2}\dot q^2$.

2) Per verificare la canonicità della trasformazione basta verificare l'invarianza della parentesi fondamentale

$$\{Q,\, P\}_{qp} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q},$$

e poiché in questo caso vale

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = 1, \qquad\qquad \frac{\partial P}{\partial p} = 1, \qquad\qquad \frac{\partial Q}{\partial p} = 0$$

la canonicità è assicurata per ogni $U(q)$.

La nuova Hamiltoniana si ricava immediatamente per sostituzione e vale

$$K(Q, P) = \frac{1}{2}P^2,$$

per cui le corrispondenti equazioni canoniche $\dot{Q} = P$, $\dot{P} = 0$ hanno la soluzione banale

$$Q(t) = Q_0 + P\,t, \qquad\qquad P(t) = P_0,$$

che si identifica con la soluzione precedente riconoscendo che $Q_0 = q_0$ e $P_0 = p_0$.