MECCANICA CLASSICA - Prova scritta - A.A. 2010/2011
Seconda prova in itinere
Venerdì 8 Aprile 2011 - ore 11

SOLUZIONI

Problema R.1

1) Nel riferimento terrestre l'intervallo di tempo T che intercorre tra il ricevimento dei due segnali é caratterizzato dalla proprietá per cui lo spazio percorso dall'astronave in quell'intervallo di tempo coincide con lo spazio percorso dall'onda nel tempo $T - T_0$, per cui $vT = c(T - T_0)$ e di conseguenza $(c - v)T = cT_0$.

Ricordando poi la formula della dilatazione del tempo negli orologi in movimento per cui $T_0 = \gamma(v)T$ si ottiene subito

$$T' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}T_0.$$

2) Si puó ripetere il ragionamento notando che deve essere $vT = c(T_1 - T)$ da cui $(c + v)T = cT_1$ per cui subito si ricava

$$T_1 = \frac{c+v}{c-v}T_0.$$

Questo risultato si poteva ottenere anche come diretta applicazione del principio di relativitá per cui la relazione tra T_1 e T' deve essere la stessa che tra T' e T_0.

3) L'effetto Doppler longitudinale implica che

$$\nu' = \gamma(v)(1 - \frac{v}{c})\nu_0 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\nu_0,$$

e in modo del tutto analogo si ottiene

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\nu' = \frac{c-v}{c+v}\nu_0.$$

É banale verificare che vale $\nu_0 T_0 = \nu' T' = \nu_1 T_1$, come ci si poteva aspettare per la relazione che intercorre in generale tra frequenze e tempi.

Problema R.2

1) La condizione $t(u\,s - m_e^4) = 0$, associata alla relazione $s + t + u = 2m_e^2$, definisce due curve nel piano (s, u):

$$s + u = 2m_e^2, \qquad\qquad t\,u = m_e^4.$$

La seconda curva è costituita da due rami di iperbole asintotici agli assi s e u, mentre la prima curva è una retta inclinata a $-\pi/4$ che incrocia gli assi coordinati nei punti $(0, 2m_e^2)$ e $(2m_e^2, 0)$ e tocca il ramo più alto dell'iperbole solo nel punto (m_e^2, m_e^2).

2) La regione cinematicamente accettabile per il processo è la regione compresa tra il ramo di iperbole e la retta, a partire dal punto di contatto tra le due curve; questa regione soddisfa la condizione fisica $s \geq m_e^2$.

Consideriamo infatti il valore assunto dalle variabili di Mandelstam nel riferimento in cui l'elettrone è inizialmente in quiete:

$$s = m_e^2 + 2m_e k, \qquad\qquad t = 2m_e^2 - 2m_e\varepsilon, \qquad\qquad u = m_e^2 - 2m_e k',$$

dove in generale ε e p indicano energia e modulo dell'impulso dell'elettrone in movimento

Le equazioni per la frontiera diventano quindi:

$$\varepsilon = m_e, \qquad\qquad (m_e + 2k)(m_e - 2k') = m^2,$$

e rappresentano le condizioni soddisfatte dalle configurazioni in cui rispettivamente

a) l'elettrone resta in quiete e il fotone mantiene la propria direzione e la propria energia (diffusione in avanti),

b) l'elettrone si muove nella direzione e verso del fotone incidente mentre il fotone diffuso si muove nel verso opposto per cui $p = k + k'$, mentre ovviamente $\varepsilon = m_e + k - k'$.

3) Il processo $e^- + e^+ \to \gamma + \gamma$ nel riferimento in cui l'elettrone è in quiete (riferimento del laboratorio) corrisponde a

$$s = m_e^2 - 2m_e k, \qquad\qquad t = 2m_e^2 + 2m_e\varepsilon, \qquad\qquad u = m_e^2 - 2m_e k'.$$

Poiché $\varepsilon \geq m_e$ vale in questo caso $t \geq 4m_e^2$ e di conseguenza l'unica regione cinematicamente accettabile è quella situata sotto il ramo inferiore dell'iperbole. La frontiera corrisponde al caso di fotoni prodotti nella stessa direzione (quella del positrone incidente) ma necessariamente discordi in verso in quanto altrimenti, essendo assimilabili a un singolo fotone, varrebbe t =0; vale quindi $p^2 = (k - k')^2$.

Possiamo infine considerare il processo $\gamma + e^+ \to \gamma + e^+$ che ha come solo effetto quello di scambiare i ruoli di s e u, e che pertanto corrisponde alla regione cinematica compresa tra il ramo dell'iperbole superiore e la retta e caratterizzata dalla condizione $u \geq m_e^2$.

Ancora una volta la frontiera descrive le configurazioni collineari, come nel caso descritto al punto 2).