**MECCANICA CLASSICA - Prova scritta - A.A. 2010/2011**
**Terza prova in itinere**
Venerdì 10 Giugno 2011 - ore 11

**SOLUZIONI**

Problema S.1

1) Le relazioni che devono essere soddisfatte sono semplicemente:

$$N = n_+ + n_0 + n_-, \qquad E = \epsilon(n_+ - n_-), \qquad n = n_0.$$

Risulta pertanto, posto per comodità $\frac{E}{\epsilon} \equiv \nu$:

$$n_+ = \frac{1}{2}(N - n + \nu), \qquad n_0 = n, \qquad n_- = \frac{1}{2}(N - n - \nu).$$

2) Dalla formula generale per il peso statistico

$$\Gamma(n_+, n_0, n_-) = \frac{N!}{n_+! n_0! n_-!}$$

si ricava facilmente per $E = 0$

$$\Gamma = \frac{N!}{n!\left(\frac{N-n}{2}!\right)^2}.$$

3) Usando la formula di Stirling, per grande N si ottiene

$$\ln\Gamma \approx (N - n)\ln 2 - n\ln\left(\frac{n}{N}\right) - (N - n)\ln\left(1 - \frac{n}{N}\right).$$

Dividendo per $N$ e passando alla variabile $x$ si ottiene quindi

$$s(x) = k[(1 - x)\ln 2 - x\ln x - (1 - x)\ln(1 - x)].$$

4) È immediato ricavare

$$s(0) = k\ln 2, \qquad s(1) = 0.$$

5) Calcolando la derivata prima di $s(x)$ si ottiene

$$\frac{ds}{dx} = k\ln\frac{1 - x}{2x},$$

da cui segue che la derivata si annulla per $x = 1/3$, e in tale caso risulta $s = k\ln 3$.

Per mostrare che si tratta di un massimo occorre calcolare la derivata seconda, che vale

$$\frac{d^2s}{dx^2} = -\frac{k}{x(1 - x)},$$

ed è quindi sempre negativa.

Problema S.2

1) La funzione di partizione canonica è data da

$$Q_N(T,V) = \frac{1}{N!h^{3N}} \int \prod_{i=1}^{N} d^3p_i d^3q_i \, e^{-H/kT},$$

dove

$$H = \sum_{i=1}^{N} c|\mathbf{p}_i|.$$

L'integrale multiplo risulta uguale al prodotto degli integrali da effettuare nelle variabili di singola particella:

$$\int d^3p d^3q \, e^{-c|\mathbf{p}|/kT} = 8\pi V \left(\frac{kT}{c}\right)^3.$$

L'energia libera vale quindi

$$F(N,T,V) = -NkT\Big(\ln\Big[8\pi\left(\frac{V}{N}\right)\left(\frac{kT}{hc}\right)^3\Big] + 1\Big).$$

2) L'energia interna si ottiene ad esempio dalla relazione

$$U(N,T,V) = F - T\frac{\partial F}{\partial T} = 3NkT.$$

3) Per ricavare l'equazione di stato si può usare la relazione

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{NkT}{V},$$

e si riconosce che si tratta ancora dell'equazione di stato dei gas perfetti.