

Compendio di Meccanica Analitica

1. Introduzione al calcolo delle variazioni

Alla base del calcolo delle variazioni sta l'idea che, per certi tipi di questioni complesse, il problema di minimizzare una quantità definita non si possa ricondurre semplicemente alla determinazione di un singolo valore numerico per una variabile algebrica, ma consista nella determinazione della dipendenza funzionale di una variabile da un parametro.

Consideriamo il caso più semplice, che è quello di una curva su un piano, rappresentabile mediante una funzione $y = y(x)$. È possibile porsi il problema della minimizzazione di un *funzionale* della funzione $y(x)$, dove per funzionale si intende ad esempio un integrale di linea del tipo

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx,$$

dove abbiamo posto

$$y'(x) \equiv \frac{dy(x)}{dx},$$

e abbiamo limitato la dipendenza della funzione f alla derivata prima della funzione y per restringerci alla classe dei problemi di immediato interesse fisico.

Possiamo inoltre restringere la ricerca del minimo del funzionale I all'insieme delle funzioni che soddisfano particolari *condizioni a contorno*:

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2.$$

Possiamo pensare di *parametrizzare* una famiglia generale di funzioni $y(x)$ mediante un singolo parametro algebrico α al variare del quale varierà anche il valore numerico di I ; posto $y = y(x, \alpha)$ vale

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x) dx.$$

In termini di α la condizione che $I(\alpha)$ assuma un valore estremo si riduce alla ben nota condizione

$$\left. \frac{\partial I}{\partial \alpha} \right|_{\bar{\alpha}} = 0,$$

che permette di determinare il valore $\bar{\alpha}$ per cui $y(x, \bar{\alpha})$ minimizza il funzionale.

Applicando le regole della derivazione parametrica la condizione precedente diventa

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right\} dx = 0,$$

ma il secondo termine nell'integrando può essere manipolato mediante l'integrazione per parti, notando che vale

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} dx \equiv \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial x} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx.$$

Notiamo a questo punto che le condizioni a contorno devono valere per tutte le curve della famiglia parametrica, e pertanto necessariamente

$$\left. \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_1} = \left. \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_2} = 0.$$

Ci siamo pertanto ridotti alla relazione

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx.$$

Introduciamo ora nuove quantità che definiamo *variazioni* delle funzioni e dei funzionali:

$$\delta I = \left. \frac{\partial I}{\partial \alpha} \right|_{\bar{\alpha}} d\alpha, \quad \delta y = \left. \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{\bar{\alpha}} d\alpha.$$

In termini delle variazioni così definite possiamo esprimere la condizione di minimo, o più in generale di estremo, nella forma

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y \, dx = 0,$$

che deve valere per una variazione arbitraria δy , in quanto questa relazione, dedotta in un intorno dell'estremo, risulta indipendente dalla forma parametrica adottata.

Condizione necessaria e sufficiente affinché la relazione di cui sopra sia soddisfatta per ogni scelta di δy è che valga la relazione

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Esiste un grande numero di semplici problemi geometrici che possono essere risolti con questo metodo. In questa sede ricordiamo soltanto i problemi di minimo cammino (cammino geodetico) su superficie assegnate, i problemi di superficie minima e il problema della brachistocrona.

Ai fini della discussione di problemi fisici è importante generalizzare la condizione di estremo ai casi in cui il funzionale dipenda da più funzioni arbitrarie $y_i(x)$. Ripetendo con gli opportuni adattamenti il ragionamento precedente, inclusa l'integrazione per parti, si ottiene

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y_i'} \delta y_i' \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \right] \delta y_i \, dx,$$

e, poiché le variazioni δy_i sono arbitrarie e tra loro indipendenti, allora necessariamente la condizione $\delta I = 0$ richiede che per ogni valore di i

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) = 0.$$

Queste equazioni sono note come *equazioni differenziali di Eulero-Lagrange*.

2. Sistemi vincolati e coordinate generalizzate. Principio di d'Alembert

Il nostro obiettivo è quello di riformulare le leggi della dinamica newtoniana in modo tale da consentire di eliminare la rappresentazione esplicita dei vincoli e da riferirsi esclusivamente ai gradi di libertà effettivi del sistema fisico di volta in volta studiato.

Ripartiamo dalle equazioni del moto per un sistema costituito da N punti materiali:

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_i,$$

dove $\mathbf{F}_i^{(e)}$ sono le forze esterne agenti sul sistema e vale la relazione $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0$ (principio di azione e reazione).

Ricordiamo che in generale un sistema può essere soggetto a *vincoli*, quali la condizione di corpo rigido (che implica distanze fisse tra i punti del sistema) o la restrizione del moto a una superficie assegnata.

Quando i vincoli sono esprimibili come relazioni funzionali tra le coordinate (ed eventualmente il tempo) si parla di vincoli *olonomi*. In caso contrario (come ad esempio nel caso di particelle di gas chiuse in una scatola) si parla di vincoli *anonomi*. Notiamo che la condizione di rotolamento, a causa della dipendenza dalla velocità, è un caso particolare di vincolo anonomo.

Vale la pena di notare, per inciso, che nella fisica fondamentale i vincoli rilevanti sono rari e comunque quasi sempre schematizzabili come vincoli olonomi, quindi la difficoltà insita nella trattazione dei vincoli anonomi è caratteristica della meccanica classica.

Il problema della trattazione dei vincoli, anche olonomi, sta nel fatto che le forze vincolari (quelle che appunto assicurano il mantenimento dei vincoli) non sono note *a priori*, ma restano determinate dalla soluzione del problema.

Ogni equazione vincolare (di tipo scalare) riduce di uno il numero dei gradi di libertà del sistema. Le equazioni vincolari si possono usare esplicitamente per eliminare tante variabili quanti sono i vincoli, riesprimendole in funzione delle altre.

Le variabili indipendenti (in numero pari a quello dei gradi di libertà effettivi), che parametrizzano (in modo largamente arbitrario) il sistema vincolato, si chiamano *coordinate generalizzate* q_i .

È possibile eliminare in modo sistematico i vincoli olonomi dalle equazioni del moto. Per far questo consideriamo inizialmente un sistema all'equilibrio, e prendiamo in esame le conseguenze di una variazione infinitesima delle coordinate del sistema che sia compatibile con le forze e con i vincoli; denotiamo con $\delta\mathbf{r}_i$ una tale variazione (*spostamento virtuale*). Vale allora banalmente $\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$, in quanto all'equilibrio le forze totali agenti sui punti del sistema si annullano.

Se consideriamo la separazione $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{R}_i$ tra le forze attive e le reazioni vincolari otteniamo quindi la relazione

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0.$$

Tuttavia in assenza di attriti (che sono comunque un fenomeno macroscopico) le forze vincolari sono perpendicolari agli spostamenti virtuali, e ne consegue quindi il risultato non banale

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

(*principio dei lavori virtuali*).

Tale relazione è algebricamente possibile poiché a causa dei vincoli gli spostamenti virtuali $\delta \mathbf{r}_i$ non sono tra loro indipendenti.

Possiamo a questo punto riscrivere la legge di Newton nella forma

$$\sum_i \left(\mathbf{F}_i - \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

da cui, riprendendo l'argomento precedente, ricaviamo

$$\sum_i \left(\mathbf{F}_i^{(a)} - \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

(*principio di d'Alembert*).

In quest'ultima relazione possiamo ora cambiare variabili, passando alle coordinate generalizzate. Posto

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t)$$

si ricava

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t},$$

mentre per ipotesi gli spostamenti virtuali non dipendono dal tempo e quindi risulta

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$

e di conseguenza

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{ij} \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \equiv \sum_j Q_j \delta q_j,$$

dove abbiamo definito le *forze generalizzate*

$$Q_j \equiv \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

D'altra parte vale anche

$$\sum_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{ij} m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Possiamo poi sfruttare la relazione

$$\sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right],$$

e notare che si può scambiare l'ordine delle derivazioni, ottenendo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right)$$

e analogamente

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

Combinando i risultati precedenti è possibile ricavare la relazione

$$\sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right],$$

dove per comodità si è posto $\mathbf{v}_i \equiv \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$.

Possiamo quindi riformulare il principio di d'Alembert nella forma:

$$\sum_j \left[Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2 \right) + \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2 \right) \right] \delta q_j = 0.$$

Se poi per l'energia cinetica adottiamo la notazione $T \equiv \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2$, e utilizziamo l'indipendenza delle variabili q_j e delle loro variazioni, possiamo riscrivere il risultato nella semplice forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0.$$

Notiamo che, a parte la presenza del termine Q_j , esiste una somiglianza di struttura con le equazioni di Eulero-Lagrange.

Notiamo poi che, nel caso di forze *conservative*, valgono le relazioni

$$\mathbf{F}_i = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}$$

e di conseguenza si può scrivere

$$Q_j \equiv \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Pertanto se, come accade nel caso di forze conservative, l'energia potenziale $V(q_j)$ dipende soltanto dalle coordinate e non dalle velocità, possiamo introdurre la funzione *Lagrangiana*

$$L(q, \dot{q}) = T - V$$

e riscrivere le leggi del moto nella forma di *equazioni di Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

In realtà la condizione che le forze non dipendano dalla velocità può in certi casi essere attenuata. Basterà che sia possibile derivare la forza generalizzata da un'espressione della forma

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right),$$

dove $U = U(q, \dot{q})$, per poter introdurre la Lagrangiana $L = T - U$.

È anche possibile, imponendo qualche condizione fisica su Q_j , derivare la forma più generale di U compatibile con le condizioni imposte.

In particolare la *causalità* richiede che le forze siano indipendenti dall'accelerazione. Pertanto (in coordinate cartesiane) U dovrà essere al più lineare nelle velocità, per garantire l'indipendenza da \mathbf{v} dopo la derivazione rispetto a \mathbf{v} . Quindi nel caso di una singola particella si potrà introdurre la parametrizzazione

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = V(\mathbf{r}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v},$$

dove per la richiesta di invarianza sotto rotazioni \mathbf{A} deve essere un vettore.

Risulta quindi, interpretando gli indici come componenti cartesiane e utilizzando la convenzione della somma su indici ripetuti

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial r_j} - v_i \frac{\partial A_i}{\partial r_j} + \frac{dA_j}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial r_j} - v_i \frac{\partial A_i}{\partial r_j} + \frac{\partial A_j}{\partial t} + v_i \frac{\partial A_j}{\partial r_i} = E_j + v_i \epsilon_{ikj} B_k,$$

dove abbiamo introdotto i due vettori indipendenti

$$E_j \equiv \frac{\partial A_j}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial r_j}, \quad B_k \equiv \epsilon_{klm} \frac{\partial A_l}{\partial r_m}.$$

Notiamo infine che, tra le proprietà che derivano dall'olonomia dei vincoli, ciò che realmente serve è soltanto la relazione *differenziale* tra le variazioni delle coordinate. Pertanto anche i vincoli anolonomi del tipo

$$\sum_k a_{ik} dq_k + a_{it} dt = 0,$$

(come quelli che compaiono nel moto di rotolamento), possono essere introdotti nel formalismo lagrangiano tramite moltiplicatori di Lagrange λ_i , e danno luogo a forze generalizzate della forma $\sum_i \lambda_i a_{ik}$.

3. Il principio di Hamilton. Momenti generalizzati e coordinate cicliche.

Siamo a questo punto in grado di riformulare i principi della dinamica newtoniana nella forma di principi variazionali.

Notiamo infatti che per i sistemi conservativi (incluso il caso dei potenziali generalizzati dipendenti linearmente dalla velocità) il moto del sistema, considerato tra gli istanti t_1 e t_2 , è tale che l'integrale di linea

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt,$$

dove $L = T - V$, assume un valore estremo (minimo) in corrispondenza della traiettoria effettiva del moto (*principio di Hamilton*).

Le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono per l'appunto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

È possibile aggiungere alla Lagrangiana una derivata totale rispetto al tempo di una funzione qualunque delle coordinate e del tempo senza modificare le condizioni di minimo, in quanto

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(L + \frac{dF(q_i, t)}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + F(q_i, t_2) - F(q_i, t_1),$$

ma a causa delle condizioni al contorno il termine addizionale è costante.

Si può anche verificare direttamente che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_j \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{dF}{dt}.$$

Come corollario di questo risultato si può verificare che la forma dell'energia cinetica in coordinate cartesiane $T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$ è una conseguenza del principio di *relatività galileiana*.

Notiamo infatti che a seguito del passaggio a un sistema di riferimento inerziale in moto con velocità \mathbf{V} rispetto a quello originario vale

$$T' = \frac{1}{2} m (\mathbf{v} + \mathbf{V})^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + m \mathbf{v} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 = T + \frac{d}{dt} (m \mathbf{r} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 t),$$

e quindi le equazioni del moto non cambiano.

D'altronde in generale, considerando una trasformazione galileiana infinitesima di parametro \mathbf{V} , essendo $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V}$, al primo ordine in \mathbf{V} vale

$$L'(v'^2) - L(v^2) \approx \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{V},$$

e quest'espressione è una derivata totale rispetto al tempo se e solo se $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ è indipendente da v^2 .

Passando a coordinate generalizzate, per vincoli olonomi indipendenti dal tempo $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j)$, l'energia cinetica è normalmente esprimibile come una forma quadratica nelle velocità generalizzate, in quanto $\mathbf{v}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$, e di conseguenza

$$T = \frac{1}{2} \sum_{jk} a_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

dove

$$a_{jk}(q) = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}.$$

Il più generale problema lagrangiano a n gradi di libertà corrisponde a n equazioni differenziali accoppiate del secondo ordine, le cui soluzioni dipendono da $2n$ parametri arbitrari, le condizioni al contorno, che possono essere rimpiazzate dalle *condizioni iniziali*.

Anche senza procedere alla completa integrazione delle equazioni è spesso possibile ottenere, per un dato sistema, un certo numero di *integrali primi* del moto, ovvero relazioni della forma

$$G(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = \text{costante}$$

che sono equazioni differenziali del primo ordine, e ci offrono informazioni sulle proprietà fisiche del sistema. Appartengono alla classe degli integrali primi in particolare le *leggi di conservazione*.

Conviene a questo punto definire i *momenti generalizzati* (o momenti coniugati)

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Nel caso particolare in cui q è una coordinata cartesiana, p è la corrispondente componente della quantità di moto, a meno che il potenziale non dipenda dalla velocità, come nel caso delle forze elettromagnetiche, per cui risulta

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \sum_i e_i \phi(\mathbf{r}_i) + \sum_i \frac{e_i}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

e pertanto

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{e_i}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \equiv \mathbf{p}_i,$$

dove il termine addizionale rappresenta la quantità di moto del campo elettromagnetico.

Se la Lagrangiana non dipende esplicitamente da una particolare coordinata q_j , anche se dipende da \dot{q}_j , la coordinata q_j si definisce *ciclica* (o ignorabile), e la corrispondente equazione di Lagrange prende la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \equiv \dot{p}_j = 0.$$

Pertanto p_j è in questo caso costante, e costituisce un integrale primo del moto; in altri termini *il momento generalizzato coniugato a una coordinata ciclica si conserva*.

4. Invarianze, simmetrie e leggi di conservazione

Possiamo utilizzare le considerazioni precedenti per dedurre nell'ambito del formalismo lagrangiano le principali leggi di conservazione a partire dalle proprietà di simmetria dei sistemi, che si riflettono nelle proprietà di invarianza delle corrispondenti Lagrangiane.

Consideriamo in primo luogo l'invarianza di un sistema fisico per traslazioni globali.

Notiamo innanzitutto che se dq_j è una traslazione globale del sistema in una determinata direzione, allora $\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$, come già discusso, e se poi V non dipende dalla velocità allora

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv Q_j.$$

Ma se dq_j è una traslazione allora $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \hat{\mathbf{n}}$, dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore della traslazione, e di conseguenza risulta

$$Q_j = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F},$$

ovvero Q_j è la componente della forza nella direzione $\hat{\mathbf{n}}$, mentre vale

$$p_j = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

per cui p_j è la componente della quantità di moto nella direzione $\hat{\mathbf{n}}$.

Se la coordinata q_j è ciclica allora V non dipende da q_j e di conseguenza $Q_j = 0$; a sua volta questa relazione esprime la conservazione della quantità di moto nella direzione $\hat{\mathbf{n}}$ della traslazione.

Consideriamo ora l'invarianza per rotazioni, e verifichiamo che se dq_j è una rotazione la conservazione del corrispondente momento coniugato coincide con la conservazione della componente del momento angolare diretta lungo l'asse di rotazione.

Anche in questo caso vale $\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$, ma ora risulta che Q_j è la componente del momento totale delle forze attive diretta lungo l'asse della rotazione.

Risulta infatti in questo caso che $d\mathbf{r}$ è ortogonale a \mathbf{r} e inoltre vale $|d\mathbf{r}| = r \sin \theta dq_j$, dove θ è l'angolo formato da \mathbf{r} con l'asse di rotazione; le relazioni precedenti si possono sintetizzare nella relazione

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{r},$$

dove ora $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore dell'asse di rotazione.

Si ottiene pertanto la relazione $Q_j = \mathbf{F} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{F})$, ovvero Q_j è la componente del momento delle forze nella direzione dell'asse di rotazione, e analogamente

$$p_j = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{r}_i) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \sum_i (\mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i)$$

risulta essere la componente del momento angolare totale nella direzione dell'asse.

Se la coordinata q_j è ciclica la corrispondente componente del momento delle forze è nulla, e ne segue che la componente del momento angolare diretta lungo l'asse della rotazione rappresentata da q_j è conservata.

Notiamo la seguente relazione generale tra leggi di conservazione e proprietà di simmetria: se una coordinata è ciclica allora la trasformazione corrispondente a una variazione della coordinata stessa rappresenta un'invarianza della Lagrangiana e una *simmetria* del sistema fisico. A ogni simmetria del sistema corrisponde quindi una legge di *conservazione*.

Possiamo derivare in questo formalismo la legge di conservazione dell'energia. Nel caso in cui la Lagrangiana non abbia nessuna dipendenza esplicita dal tempo risulta

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt},$$

da cui facendo uso delle equazioni di Lagrange si ottiene

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right].$$

Ne consegue la proprietà non banale

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right] = 0,$$

ovvero esiste un integrale primo

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L.$$

Possiamo riconoscere che H coincide per sistemi conservativi con l'energia meccanica totale. Notiamo infatti che in tal caso vale

$$H = \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L,$$

ma poiché l'energia cinetica è quadratica nelle velocità generalizzate risulta

$$\sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T,$$

e di conseguenza

$$H = 2T - L = T + V = E.$$

5. Proprietà del sistema di riferimento del centro di massa

Le proprietà di invarianza di un sistema fisico per traslazioni spaziali e temporali e per rotazioni si traducono in particolari proprietà mostrate dal sistema di riferimento del centro di massa.

Le coordinate del centro di massa (che si comportano come coordinate cicliche) sono definite dalla relazione

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i},$$

e, avendo definito la massa totale $M = \sum_i m_i$, vale per la quantità di moto totale la relazione $M\mathbf{V} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$, dove $\mathbf{V} \equiv \dot{\mathbf{R}}$ è la velocità del centro di massa.

Le equazioni del moto del centro di massa seguono dalle relazioni

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij}$$

che, poiché vale il principio di azione e reazione $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0$, si riducono a $M\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F}^{(e)}$, dove $\mathbf{F}^{(e)}$ è la forza esterna totale.

Analogamente si ricava

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_{ij},$$

ma valgono anche le relazioni $\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \wedge \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \wedge \mathbf{F}_{ij} = 0$ e pertanto, essendo $\mathbf{L} \equiv \sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i$ il momento angolare totale, vale anche $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{T}^{(e)}$, dove $\mathbf{T}^{(e)}$ è il momento totale delle forze esterne.

Se introduciamo coordinate primarie

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}, \quad \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}$$

che descrivono il sistema nel riferimento del centro di massa, si ha allora una naturale separazione delle variabili. Consideriamo in primo luogo la quantità di moto, per cui valgono le relazioni

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V}) = \sum_i m_i \mathbf{v}'_i + M\mathbf{V},$$

da cui consegue $\sum_i m_i \mathbf{v}'_i = 0$, e vale anche $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0$.

Per quanto riguarda il momento angolare, vale

$$\mathbf{L} = \sum_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) \wedge m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V}) = \sum_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}'_i + \mathbf{R} \wedge M\mathbf{V},$$

dove abbiamo sfruttato le proprietà delle coordinate primarie derivate in precedenza.

Pertanto si può scrivere

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}_{cm}$$

dove $\mathbf{L}' \equiv \sum_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}'_i$ è il momento angolare *nel* riferimento del centro di massa mentre $\mathbf{L}_{cm} \equiv \mathbf{R} \wedge M\mathbf{V}$ è il momento angolare *del* centro di massa in un riferimento inerziale qualunque.

Analogamente per quanto riguarda l'energia meccanica totale si trova

$$\begin{aligned} E &\equiv \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2 + V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V})^2 + V(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}'_i{}^2 + V(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) + \frac{1}{2} M\mathbf{V}^2 = E' + E_{cm}, \end{aligned}$$

dove $E' \equiv \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}'_i{}^2 + V(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j)$ è l'energia meccanica *nel* riferimento del centro di massa mentre $E_{cm} \equiv \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2$ è l'energia meccanica *del* centro di massa in un riferimento inerziale qualunque.

Notiamo le particolari proprietà del sistema a due corpi nel riferimento del centro di massa. Poiché vale

$$m_1 \mathbf{r}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2 = 0, \quad m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = 0$$

risulta in questo caso conveniente parametrizzare il sistema in termini delle coordinate relative $\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2 \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{s}$.

Le relazioni precedenti sono risolte da

$$\mathbf{r}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{s}, \quad \mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{s},$$

per cui sostituendo risulta

$$\mathbf{L}' \equiv \mathbf{r}'_1 \wedge m_1 \mathbf{v}'_1 + \mathbf{r}'_2 \wedge m_2 \mathbf{v}'_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}},$$

$$E' \equiv \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}'_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}'_2{}^2 + V(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{s}}^2 + V(\mathbf{s}).$$

Pertanto il sistema risulta dinamicamente equivalente a un sistema fisico costituito da una singola particella di massa $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (*massa ridotta*) posta nel campo delle forze esterne generate da un potenziale $V(\mathbf{s})$.

È facile verificare che la Lagrangiana del problema a due corpi, scritta in termini delle coordinate relative e delle coordinate del centro di massa, si decompone in due termini disaccoppiati di cui uno dipende solo dalle coordinate del centro di massa e corrisponde alla Lagrangiana di una particella libera, mentre l'altro dipende dalle coordinate relative e descrive la dinamica di una particella di massa μ dotata di energia potenziale V .

6. Piccole oscillazioni

In sistemi con vincoli indipendenti dal tempo l'equilibrio corrisponde alla condizione

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q_{i0}} = 0.$$

Se ci interessa studiare il moto nelle immediate vicinanze di un punto di equilibrio stabile possiamo scegliere nuove coordinate $\eta_i = q_i - q_{i0}$ e sviluppare l'energia potenziale in serie di Taylor:

$$V(\eta_1, \dots, \eta_n) \approx V_0 + \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij} \eta_i \eta_j + \dots$$

dove abbiamo introdotto la costante $V_0 \equiv V(q_{10}, \dots, q_{n0})$ e la matrice $n \times n$ delle costanti

$$V_{ij} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(q_{10}, \dots, q_{n0}).$$

Con la stessa precisione vale per l'energia cinetica in prossimità dell'equilibrio

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} c_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \approx \frac{1}{2} \sum_{ij} c_{ij}(q_{10}, \dots, q_{n0}) \dot{q}_i \dot{q}_j \equiv \frac{1}{2} \sum_{ij} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j.$$

La Lagrangiana effettiva si riduce quindi a

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} (T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j),$$

e le equazioni del moto diventano

$$\sum_j (T_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j) = 0.$$

Queste equazioni si risolvono assumendo che esistano soluzioni di tipo oscillatorio della forma

$$\eta_i = a_i \cos(\omega t + \varphi).$$

Sostituendo nelle equazioni si ottengono le relazioni algebriche lineari

$$\sum_j (-\omega^2 T_{ij} a_j + V_{ij} a_j) = 0.$$

La condizione per l'esistenza di soluzioni non banali è

$$\det[\omega^2 T_{ij} - V_{ij}] = 0,$$

che ha la struttura di un'equazione agli autovalori con n soluzioni $\omega^{(l)}$, le *frequenze proprie* del sistema, cui corrispondono n autovettori $a_i^{(l)}$, che definiscono i *modi normali* del sistema. La soluzione generale delle equazioni del moto è quindi

$$\eta_k = \sum_l b_{(l)} a_k^{(l)} \cos(\omega^{(l)} t + \varphi_{(l)}),$$

e dipende da $2n$ parametri arbitrari $b_{(l)}$ e $\varphi_{(l)}$.

7. Introduzione al formalismo hamiltoniano

Ricordiamo che nella formulazione lagrangiana le variabili algebricamente indipendenti sono le coordinate e le velocità generalizzate. Ma per molti aspetti è preferibile una formulazione in cui coordinate e momenti generalizzati abbiano il ruolo di variabili indipendenti.

Il procedimento matematico che consente un tale cambiamento di variabili è la *trasformazione di Legendre*. Per esemplificare il procedimento consideriamo una funzione di due variabili $f(x, y)$ e notiamo che vale

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Introduciamo ora le nuove variabili $u \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ e $v \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$ e supponiamo di voler eliminare x in favore di u . Definiamo quindi la funzione $g \equiv f - ux$ e notiamo che vale

$$dg = df - u dx - x du = u dx + v dy - u dx - x du = v dy - x du.$$

Vale pertanto $x = -\frac{\partial g}{\partial u}$ e $v = \frac{\partial g}{\partial y}$.

Questa procedura è abituale in termodinamica dove, a seconda delle variabili che interessano fisicamente, si definiscono funzioni di stato che sono trasformate di Legendre l'una dell'altra.

Nel presente contesto la procedura si applica definendo *Hamiltoniana* la funzione

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t),$$

il cui differenziale è per definizione

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt.$$

Ma applicando la definizione di H risulta

$$dH = \sum_i (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

da cui facendo uso della definizione dei momenti $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ si ottiene

$$dH = \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

e ricordando le equazioni di Lagrange $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ si ricava infine

$$dH = \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Per la definizione di differenziale otteniamo quindi

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Queste equazioni sono dette *equazioni di Hamilton* o *equazioni canoniche*, e formano un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine che sostituisce il sistema delle equazioni di Lagrange.

Notiamo che l'equazione $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ implica che se una coordinata lagrangiana q_j è ciclica, poiché in tal caso $\dot{p}_j = 0$ allora di conseguenza $\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$ e anche l'Hamiltoniana è ciclica in q_j .

Nel formalismo hamiltoniano, se q_j è ciclica, allora p_j è una costante e svolge tale ruolo nelle equazioni canoniche, che si riducono quindi a $2(n-1)$.

Può essere utile introdurre la *funzione di Routh*, ottenuta dalla Lagrangiana effettuando la trasformazione soltanto rispetto alle coordinate cicliche:

$$R(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_c, \dot{q}_{c+1}, \dots, \dot{q}_n, t) = \sum_{i=1}^c p_i \dot{q}_i - L,$$

per cui vale

$$dR = \sum_{i=1}^c \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=c+1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

e ne consegue per le coordinate cicliche

$$\frac{\partial R}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial R}{\partial q_i} = -\dot{p}_i = 0,$$

mentre per le altre coordinate valgono equazioni di tipo lagrangiano

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0.$$

Si noti che grazie alla ciclicità delle prime c coordinate i corrispondenti momenti sono conservati e pertanto figurano esclusivamente come parametri costanti nel sistema delle $n - c$ equazioni lagrangiane, mentre le coordinate cicliche in quanto tali diventano del tutto ignorabili.

Ricordiamo infine che, se $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, allora H è una costante del moto. Questa proprietà discende direttamente anche dalle relazioni precedenti, in quanto vale

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i (\dot{q}_i \dot{p}_i - \dot{p}_i \dot{q}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

8. Formulazione variazionale del formalismo canonico

Se nella formulazione della dinamica si vogliono assumere come punto di partenza le equazioni canoniche, risulta conveniente poterle derivare direttamente da un principio variazionale.

Riformuliamo quindi il principio di Hamilton scrivendo la Lagrangiana come funzione dell'Hamiltoniana:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right] dt = 0$$

ottenendo il principio di Hamilton modificato:

$$\delta \int_{q_1}^{q_2} \sum_i p_i dq_i - \delta \int_{t_1}^{t_2} H dt = 0.$$

Conviene tornare temporaneamente a una descrizione parametrica delle traiettorie variate, intendendo quindi che $\delta = d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}$, ma ricordando che ora le variazioni delle p e delle q devono essere effettuate indipendentemente. Risulta allora

$$\begin{aligned} \delta I &= d\alpha \frac{\partial I}{\partial \alpha} = d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right] dt = \\ &= d\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \right] dt = 0, \end{aligned}$$

in quanto gli estremi di integrazione non dipendono da α .

Ma notiamo che vale la relazione

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt = p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt,$$

da cui, sfruttando la cancellazione del primo termine dovuta all'indipendenza da α delle condizioni a contorno, possiamo ottenere per sostituzione

$$\begin{aligned} \delta I &= d\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i - \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \delta q_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right] dt = 0, \end{aligned}$$

e per il principio di indipendenza delle variazioni ne segue subito

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

9. Trasformazioni canoniche

L'arbitrarietà nella scelta delle coordinate generalizzate si traduce in modo non banale nella possibilità di riparametrizzare la descrizione di un sistema fisico nell'ambito del formalismo canonico.

Notiamo innanzitutto che è possibile effettuare anche in questo caso tutte le trasformazioni che corrispondono a un cambiamento di coordinate generalizzate. La scelta di un nuovo sistema di coordinate generalizzate $Q_i = Q_i(q, t)$ è definita una *trasformazione puntuale*.

Ma in generale possiamo ipotizzare l'esistenza di trasformazioni del tipo

$$Q_i = Q_i(p, q, t), \quad P_i = P_i(p, q, t),$$

soggette all'unico vincolo che le nuove coordinate Q, P siano *canonicamente coniugate*, condizione che si esprime con la richiesta che esista una funzione $K(Q, P, t)$, Hamiltoniana trasformata del sistema, tale che

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}.$$

Tutte le trasformazioni per cui è soddisfatta questa condizione si definiscono *trasformazioni canoniche* (o di contatto).

Notiamo che per ipotesi, accanto alla relazione

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p, q, t)] dt = 0.$$

deve valere anche

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [\sum_i P_i \dot{Q}_i - K(P, Q, t)] dt = 0.$$

e quindi gli integrandi possono differire al più per una derivata totale rispetto al tempo $\frac{dF}{dt}$, dove F si definisce *funzione generatrice*. Una volta fissata F la trasformazione è completamente determinata.

Notiamo che la funzione F deve dipendere sia da variabili originarie che da variabili trasformate, onde poter stabilire una relazione tra le une e le altre.

Consideriamo in primo luogo il caso in cui $F = F_1(q, Q, t)$. Vale pertanto

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p, q, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(P, Q, t) + \frac{d}{dt} F_1(q, Q, t),$$

da cui esplicitando la derivazione

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p, q, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(P, Q, t) + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Poiché per ipotesi q e Q sono variabili indipendenti deve quindi risultare necessariamente

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

ed è possibile, data F_1 , ricavare da queste relazioni nell'ordine le funzioni $Q_i(p_i, q_i, t)$, le funzioni $P_i(p_i, q_i, t)$ e infine la nuova Hamiltoniana $K(Q_i, P_i, t)$.

Il passaggio agli altri possibili casi di scelta delle variabili indipendenti può al solito essere effettuato mediante trasformazioni di Legendre. In particolare risulta

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_i P_i Q_i,$$

da cui segue

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Vale poi

$$F_3(Q, p, t) = F_1(q, Q, t) - \sum_i p_i q_i,$$

da cui si derivano le relazioni

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}.$$

Vale infine

$$F_4(p, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_i P_i Q_i - \sum_i p_i q_i,$$

che implica

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}.$$

Può essere utile mettere in evidenza alcuni casi di funzioni generatrici di particolare interesse. Ad esempio la funzione $F_2 = \sum_i q_i P_i$ corrisponde alla trasformazione identica, mentre $F_1 = \sum_i q_i Q_i$ scambia tra loro le coordinate e i momenti. Notiamo infine che la funzione $F_2 = \sum_i f_i(q, t) P_i$ genera le trasformazioni $Q_i = f_i(q, t)$; pertanto tutte le trasformazioni puntuali sono canoniche, ed è immediato trovare la relazione tra le p_i e le P_i .

10. Parentesi di Poisson

Ci poniamo ora il problema di rappresentare nel quadro del formalismo canonico la derivata temporale di una qualunque grandezza fisica f dipendente dalle p e dalle q . Dalle definizioni generali si ricava

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i.$$

Ma le equazioni del moto di Hamilton ci permettono le sostituzioni che portano a

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Poniamo ora per definizione

$$\{f, H\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right),$$

parentesi di Poisson tra f e H .

Possiamo allora scrivere:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}.$$

Grazie alla definizione data è possibile esprimere le leggi di conservazione, per quantità che non dipendono esplicitamente dal tempo, mediante la richiesta che le parentesi di Poisson della quantità conservata con l'Hamiltoniana siano nulle:

$$\{f, H\} = 0.$$

La nozione di parentesi di Poisson si può estendere a *due* quantità arbitrarie, ponendo

$$\{f, g\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right),$$

e dalla definizione conseguono le seguenti proprietà:

$$\{f, K\} = 0$$

per K costante,

$$\{f, g\} = -\{g, f\},$$

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\},$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}.$$

In particolare, se una delle funzioni f o g coincide con una variabile canonica p o q , allora le parentesi di Poisson si riducono a derivate parziali:

$$\{q_i, f\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \{p_i, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i},$$

in quanto vale $\frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_i}{\partial p_k} = \delta_{ik}$ e $\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0$.

Si può quindi individuare un insieme speciale di parentesi di Poisson *fondamentali*:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

Vale infine l'importante *identità di Jacobi*:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

Per la sua dimostrazione basterà concentrarsi ad esempio sui termini che contengono derivate seconde di f ; per gli altri termini si potrà ripetere l'argomento con le opportune permutazioni di variabili. Risultano quindi i contributi:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i}\right) \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i}\right) - \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i}\right) \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i}\right)$$

e sviluppando è semplice riconoscere che tutti i contributi della stessa forma si cancellano.

È utile notare che tutte le proprietà delle parentesi di Poisson che abbiamo elencato sono possedute anche dal *commutatore* $[A, B] \equiv AB - BA$ di due quantità non commutanti.

Ci sono molte proprietà fisiche importanti che conseguono dalle relazioni precedenti. Supponiamo in particolare che f e g siano due integrali primi; allora anche $\{f, g\}$ è un integrale primo (non necessariamente indipendente). Nel caso in cui $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} = 0$ la prova segue direttamente dall'identità di Jacobi, scegliendo $h = H$ e notando che dalle relazioni $\{f, H\} = \{g, H\} = 0$ si può ricavare immediatamente $\{\{f, g\}, H\} = 0$.

Nel caso di dipendenza esplicita dal tempo si può invece notare che l'identità di Jacobi

$$\{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \{H, \{f, g\}\} = 0,$$

unita al fatto che $\frac{df}{dt} = \frac{dg}{dt} = 0$, implica

$$-\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\} + \{g, \frac{\partial f}{\partial t}\} + \{H, \{f, g\}\} = 0$$

e di conseguenza

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} + \{\{f, g\}, H\} = \frac{d}{dt} \{f, g\} = 0.$$

La proprietà più importante delle parentesi di Poisson dal punto di vista fisico è il fatto che il loro valore non dipende dal sistema di coordinate canoniche in cui sono espresse.

In particolare questa proprietà vale per le parentesi di Poisson fondamentali, e sono quindi soddisfatte le relazioni

$$\sum_i \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \right) = 0,$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right) = \delta_{jk}.$$

Una dimostrazione dell'invarianza delle parentesi di Poisson per trasformazioni canoniche si può ottenere considerando le funzioni f e g come funzioni delle variabili q e P . Risulta allora

$$\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) =$$

$$= \sum_{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial P_k} - \frac{\partial f}{\partial P_k} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \frac{\partial P_k}{\partial p_i} + \sum_{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \frac{\partial q_k}{\partial p_i}.$$

Analogamente vale

$$\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial Q_i} \right) =$$

$$= \sum_{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial P_k} \frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial P_k} \right) \frac{\partial P_k}{\partial Q_i} + \sum_{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial Q_i}.$$

Ma notiamo che dalle proprietà della funzione generatrice $F_3(p, Q)$ si possono dedurre le relazioni

$$\frac{\partial P_k}{\partial p_i} = -\frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_k \partial p_i}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} = -\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_k \partial Q_i},$$

$$\frac{\partial q_k}{\partial p_i} = -\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_k \partial p_i}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial Q_i} = -\frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_k \partial Q_i}.$$

Sostituendo queste relazioni nelle espressioni precedentemente derivate e notando che la doppia somministrazione di quantità simmetriche per scambio degli indici i, k moltiplicate per quantità antisimmetriche sotto lo stesso scambio produce un risultato uguale a zero si verifica immediatamente che le due espressioni sono completamente equivalenti e pertanto

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}.$$

Tra i corollari di questo risultato, oltre l'invarianza delle parentesi fondamentali, vale la pena di notare che risulta

$$\{Q_k, f\} = \frac{\partial f}{\partial P_k}, \quad \{P_k, f\} = -\frac{\partial f}{\partial Q_k}.$$

Vale anche la relazione inversa, per cui l'invarianza delle parentesi di Poisson è condizione sufficiente per la canonicità di una trasformazione.

11. Trasformazioni infinitesime

Introducendo la nozione di trasformazioni di contatto infinitesime, ovvero trasformazioni in cui le coordinate e i momenti variano soltanto di quantità infinitesimali, si possono formalizzare nel linguaggio delle parentesi di Poisson le proprietà di simmetria e di invarianza.

Consideriamo in generale la trasformazione

$$Q_i = q_i + \delta q_i, \quad P_i = p_i + \delta p_i,$$

dove δq_i e δp_i sono variazioni infinitesime.

La corrispondente funzione generatrice

$$F_2 = \sum_i q_i P_i + \epsilon G(q, P)$$

differisce di una quantità infinitesima dall'identità, e vale

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} = P_i - \delta p_i,$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} = q_i + \delta q_i,$$

da cui si ricava, a meno di infinitesimi di ordine superiore

$$\delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad \delta q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}.$$

Notiamo ora che cosa accade se scegliamo $G = H(q, p)$, nel qual caso ϵ ha le dimensioni fisiche e l'interpretazione di un intervallo di tempo infinitesimo dt . Risulta allora

$$\delta q_i = dt \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i dt = dq_i,$$

$$\delta p_i = -dt \frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i dt = dp_i.$$

Il moto (infinitesimo) del sistema è descrivibile mediante una trasformazione infinitesima di contatto, e H è la *generatrice* dell'evoluzione temporale del sistema.

Queste considerazioni riducono il problema dinamico al problema formale di individuare la trasformazione canonica che rende tutti i momenti e le coordinate uguali a costanti del moto (valori iniziali). Questo punto di vista è alla base della formulazione di Hamilton-Jacobi della dinamica.

Consideriamo ora l'effetto di una trasformazione canonica infinitesima su una funzione qualunque $u(q, p)$:

$$\begin{aligned} \delta u &= u(q + \delta q, p + \delta p) - u(q, p) = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \delta p_i \right) = \\ &= \epsilon \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) = \epsilon \{u, G\}. \end{aligned}$$

Le parentesi di Poisson esprimono l'effetto di una trasformazione infinitesima su una funzione arbitraria. Considerando in particolare l'Hamiltoniana vale

$$\delta H = \epsilon \{H, G\},$$

e poiché le parentesi di Poisson delle costanti del moto con l'Hamiltoniana sono nulle, ne consegue che le costanti del moto sono le funzioni generatrici di quelle trasformazioni canoniche infinitesime che lasciano invariata l'Hamiltoniana.

Se il sistema fisico esaminato è simmetrico rispetto a una trasformazione la sua Hamiltoniana non cambia per effetto della trasformazione, e a questo fatto è associata una costante del moto.

Le leggi di conservazione dei momenti associati a coordinate cicliche diventano un caso particolare della regola generale. Consideriamo ad esempio la trasformazione

$$\delta q_j = \epsilon \delta_{ij}, \quad \delta p_j = 0.$$

La scelta $G = p_i$ è l'unica che genera una trasformazione infinitesima corrispondente alla simmetria $q_i \rightarrow q_i + \epsilon$. Quindi p_i , il momento coniugato a q_i , risulta conservato se q_i è ciclica.

Bibliografia

L.D.Landau, E.M.Lifshitz, *Meccanica*, Editori Riuniti, 1982

È un classico della fisica teorica, con i consueti pregi dell'essenzialità, della originalità e della metodologia euristica.

A.Sommerfeld, *Meccanica*, Zanichelli, 1984

Opera ormai antica ma di insuperata eleganza, semplicità e chiarezza. Tratta alcuni temi classici della meccanica analitica.

A.Fasano, S.Marmi, *Meccanica Analitica*, Bollati Boringhieri, 1994

Opera ricca e completa, molto accurata anche sul piano del formalismo, adatta soprattutto per un approfondimento degli aspetti fisico-matematici.

H.Goldstein, *Meccanica Classica*, Zanichelli, 1994

È un manuale classico di larghissima diffusione, tuttora valido per l'impostazione, rigorosa ma non formale, e per lo spettro dei temi trattati.

J.B.Marion, S.T.Thornton, *Classical Dynamics*, Harcourt, 1995

Popolare nelle università americane, esprime un punto di vista pragmatico con un'esposizione piana, molto adatta per uno studio introduttivo.

V.I.Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica*, Editori Riuniti, 2004

È un testo classico e autorevolissimo, finalmente ristampato nell'edizione italiana

Compendio di Meccanica Relativistica

1. Gli assiomi della fisica classica e le loro conseguenze

In una teoria matematica si introducono *concetti primitivi* e *assiomi*. Le conseguenze della teoria si deducono mediante *teoremi*. L'unico criterio di verità è la coerenza interna.

Una teoria fisica è una teoria matematica corredata da un insieme di *prescrizioni operative* che mettono in relazione enti primitivi o derivati della teoria con *misure* effettuabili nella realtà. Poiché le conseguenze della teoria si traducono in *predizioni* sul risultato di misure, al criterio della coerenza si aggiunge quello della corrispondenza con l'esperienza. Quando i risultati degli esperimenti non sono interpretabili all'interno di una teoria fisica, occorre modificare gli assiomi della teoria stessa.

A seguito dello straordinario sviluppo sperimentale del secolo XIX gli assiomi della meccanica, che erano stati formulati da Newton alla fine del XVII secolo, sono stati modificati nel XX secolo per riconciliare teoria ed esperimento:

1) La non covarianza galileiana delle equazioni di Maxwell e la mancata evidenza per l'esistenza di un riferimento privilegiato hanno imposto la nozione di una velocità limite: $c \neq \infty \rightarrow$ *meccanica relativistica*

2) Il problema del corpo nero e quello della struttura atomica hanno imposto la nozione di un'unità minima negli scambi di energia: $\hbar \neq 0 \rightarrow$ *meccanica quantistica*

3) A queste rivoluzioni scientifiche deve essere aggiunta la teoria della *relatività generale* che porta all'abbandono della descrizione euclidea dello spazio in favore della nozione di uno *spaziotempo curvo*.

Notiamo che in ogni caso la teoria classica, confermata con ottima approssimazione in innumerevoli esperimenti, continua a valere negli opportuni limiti delle nuove teorie.

Prendiamo ora in esame gli assiomi della *fisica classica*. Essi si distinguono in assiomi generali, assiomi della meccanica e assiomi dell'elettrodinamica.

Gli assiomi generali sono:

A) Esiste uno spazio assoluto tridimensionale invariante per rotazioni e traslazioni (candidato è il riferimento delle stelle fisse)

B) Esiste il tempo assoluto (implicante simultaneità e ordinamento assoluto degli eventi) invariante per traslazioni temporali

Da questi due assiomi discende la *cinematica classica* dei moti assoluti e relativi.

Gli assiomi della meccanica, a partire dai concetti primitivi di massa e forza, si possono enunciare nella formulazione di Newton (principio di inerzia, legge della forza e principio di azione e reazione) o, più modernamente, nella formulazione di Mach:

C) Per ogni corpo esiste un coefficiente m tale che le interazioni binarie di corpi isolati da influenze esterne soddisfano la relazione $m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 = 0$.

Questa relazione può essere usata per definire m ed \mathbf{F} .

Dagli assiomi generali in congiunzione con gli assiomi della meccanica discende la *relatività galileiana*:

Le leggi della meccanica sono invarianti rispetto al passaggio da un sistema di riferimento nello spazio assoluto a un sistema di riferimento che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad esso. Da esperienze meccaniche non è possibile decidere la velocità assoluta di un sistema di riferimento galileiano inerziale.

Le *trasformazioni di Galileo* sono definite dalle relazioni

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad t' = t,$$

e dalle loro inverse

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}t', \quad t = t',$$

dove \mathbf{v} è la velocità relativa del riferimento primato rispetto all'altro. Ne consegue banalmente la legge di trasformazione delle velocità:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v},$$

ovvero $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, che implica a sua volta $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$.

Dall'invarianza della massa consegue l'invarianza galileiana delle leggi della meccanica:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}.$$

Gli assiomi dell'elettrodinamica sono le *equazioni di Maxwell* per i campi elettrici e magnetici.

Le soluzioni delle equazioni di Maxwell nel vuoto sono *onde elettromagnetiche* che si propagano alla velocità $c = 299792458 \text{ m/s}$ nel riferimento in cui valgono le equazioni, che *non sono invarianti* per trasformazioni di Galileo.

Mentre gli assiomi della meccanica sembravano indebolire gli assiomi generali, asserendo l'impossibilità di determinare meccanicamente il sistema di riferimento dello spazio assoluto, gli assiomi dell'elettrodinamica sembrano rafforzarli, inducendo a formulare la teoria dell'*etere* o riferimento in quiete assoluta, che sarebbe quello in cui valgono le equazioni di Maxwell.

Esperimenti ottici dovrebbero permettere di individuare il riferimento dell'*etere*. Consideriamo in particolare il fenomeno dell'aberrazione stellare e l'effetto Doppler.

L'astronomo Bradley nel 1727/28 notò una variazione nella posizione apparente delle stelle nel corso dell'anno (*aberrazione stellare*).

L'origine del fenomeno sta nel fatto che la direzione osservata di un raggio di luce dipende dalla velocità relativa della Terra rispetto alla sorgente luminosa (stella).

Supponendo che nel riferimento in cui la stella è in quiete la velocità del raggio sia \mathbf{c} , nel riferimento terrestre vale $\mathbf{c}' = \mathbf{c} - \mathbf{v}$.

Sia θ l'angolo tra la direzione del moto della Terra e la direzione del raggio proveniente dalla stella nel riferimento di quiete della stessa: $\cos \theta = \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{c}}$.

Sia invece θ' l'angolo tra la direzione del moto della Terra e la direzione apparente del raggio nel riferimento terrestre: $\cos \theta' = \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{c}}'$.

Allora dalle relazioni

$$c' \sin \theta' = c \sin \theta \qquad c' \cos \theta' = c \cos \theta - v$$

risulta

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \frac{v}{c}}$$

e si può anche ricavare, per $v \ll c$,

$$\tan(\theta' - \theta) = \frac{\frac{v}{c} \sin \theta}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \approx \frac{v}{c} \sin \theta.$$

Se nel corso dell'anno la Terra si muove relativamente all'*etere*, ovvero se almeno in qualche periodo $\mathbf{v} \neq 0$, la posizione apparente delle stelle fisse cambia. È tuttavia facile convincersi che, all'ordine di $\frac{v}{c}$, stiamo soltanto osservando l'effetto del movimento *relativo* della Terra rispetto alle stelle.

L'*effetto Doppler* consiste nella variazione della frequenza di un'onda emessa da una sorgente in movimento rispetto all'osservatore.

Consideriamo un'onda (piana infinita) emessa in un riferimento in quiete rispetto all'*etere* e caratterizzata da una frequenza ν e da una lunghezza d'onda λ . Vale la relazione fondamentale $c = \lambda\nu$.

Consideriamo come quest'onda appare a un osservatore in moto con velocità \mathbf{v} rispetto all'*etere*, e sia $\hat{\mathbf{n}}$ il versore della direzione di propagazione dell'onda, che per onde piane e trasformazioni di Galileo non è soggetta ad aberrazione ($\hat{\mathbf{n}}' = \hat{\mathbf{n}}$).

La *fase* dell'onda è *invariante* per cambiamento di sistema di riferimento, e pertanto vale

$$\Phi = \nu(t - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}}{c}) = \nu'(t' - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'}{c'}),$$

dove peraltro \mathbf{r}' e t' sono legati a \mathbf{r} e t da una trasformazione di Galileo, e possiamo quindi dedurre le relazioni

$$\frac{\nu}{c} = \frac{\nu'}{c'} = \frac{1}{\lambda}, \qquad \nu'(1 + \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}}{c'}) = \nu,$$

ovvero

$$c' = c - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}, \qquad \nu' = \nu(1 - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}}{c}).$$

Quest'ultima relazione esprime la formulazione matematica dell'effetto Doppler classico: la frequenza delle onde osservate da un sistema di riferimento in moto relativo rispetto alla sorgente diminuisce se l'osservatore si allontana e aumenta se l'osservatore si avvicina.

Ma più in generale, se osservatore e sorgente sono entrambi in moto rispetto all'etere, con velocità assolute \mathbf{v}_o e \mathbf{v}_s , risulta

$$\nu' = \nu \frac{(1 - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_o}{c})}{(1 - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_s}{c})} \approx \nu (1 - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{v}_o - \mathbf{v}_s)}{c}),$$

dove $\mathbf{v}_o - \mathbf{v}_s$ è la velocità relativa dell'osservatore rispetto alla sorgente. Pertanto anche in questo caso all'ordine di $\frac{v}{c}$ stiamo soltanto osservando l'effetto del moto relativo.

2. Gli esperimenti cruciali

Poiché tutti gli esperimenti che misurano effetti del primo ordine in $\frac{v}{c}$ non sono in grado di svelare l'esistenza di un sistema di riferimento assoluto occorre considerare effetti del secondo ordine in $\frac{v}{c}$, in grado di discriminare tra le differenti possibilità. Il prototipo di tali esperimenti è quello di Michelson (1881) e Michelson-Morley (1887).

L'apparato (*interferometro di Michelson-Morley*) è costituito da due bracci perpendicolari, ai cui estremi sono posti specchi e nel cui punto di incontro è posto uno specchio semiriflettente, cosicché risulta possibile far interferire luce prodotta da un'unica sorgente dopo averle fatto percorrere cammini ottici differenti e tra loro ortogonali.

Poiché la Terra è in moto rispetto al Sole, almeno durante qualche periodo dell'anno essa dovrebbe essere in moto anche rispetto all'etere. Supponiamo ora che l'apparato sia disposto in modo tale che \mathbf{v} , la velocità della Terra rispetto all'etere, sia diretta lungo il braccio 1, e calcoliamo la differenza dei tempi impiegati dalla luce a percorrere i due bracci:

$$T_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

$$T_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

dove l_1, l_2 sono le lunghezze dei bracci e abbiamo calcolato la velocità della luce nei vari tratti applicando la relazione $\mathbf{c}' = \mathbf{c} - \mathbf{v}$.

Per un interferometro a bracci uguali $l_1 = l_2 = l$ la differenza di fase tra i due cammini ottici vale quindi

$$\Delta\Phi = \nu(T_1 - T_2) = \frac{2\nu l}{c} \left[\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right] \approx \frac{l}{\lambda} \left(\frac{v}{c}\right)^2,$$

mentre per un interferometro a bracci disuguali, per misure effettuate prima e dopo una rotazione di $\frac{\pi}{2}$, gli sfasamenti predetti sono

$$\Delta\Phi = \frac{2\nu}{c} \left[\frac{l_1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right], \quad \Delta\Phi' = \frac{2\nu}{c} \left[\frac{l_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \right],$$

e di conseguenza

$$\Delta\Phi - \Delta\Phi' = \frac{2\nu}{c} (l_1 + l_2) \left[\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right] \approx \frac{l_1 + l_2}{\lambda} \left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

Nell'esperimento di Michelson-Morley la lunghezza del cammino ottico era di 11 m , $\lambda = 5.9 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, $\frac{v}{c} \approx 10^{-4}$. L'effetto atteso era quindi $\Delta\Phi - \Delta\Phi' \approx 0.37$, mentre l'apparato era in grado di rivelare uno spostamento di frange e uno sfasamento 100 volte più piccoli. Il risultato sperimentale fu totalmente negativo.

Assumendo dimostrata su queste basi l'*isotropia* della velocità della luce, Kennedy e Thorndike nel 1932 utilizzarono l'interferometro a bracci disuguali, in cui $\Delta\Phi = \frac{2\nu}{c} \Delta l$, come strumento di misura della velocità della luce tramite la relazione $c = 2\nu \frac{\Delta l}{\Delta\Phi}$. Il risultato fu la dimostrazione della *costanza* della velocità della luce in differenti sistemi di riferimento con una precisione relativa di $0.6 \cdot 10^{-8}$, ossia di circa 2 m/s .

3. I postulati della teoria della relatività speciale

La teoria classica dell'elettromagnetismo (*equazioni di Maxwell*) è manifestamente non invariante per trasformazioni di Galileo, il che potrebbe indurre a ipotizzare l'esistenza di un singolo sistema di riferimento privilegiato (*etere*) nel quale le equazioni di Maxwell sono soddisfatte esattamente.

Alcuni esperimenti cruciali tuttavia dimostrano l'*isotropia* (Michelson-Morley) e la *costanza* (Kennedy-Thorndike) della velocità della luce misurata in differenti sistemi di riferimento inerziali in moto relativo.

È possibile riconciliare tutti questi risultati riformulando ed estendendo il principio di relatività per includere il fatto che in natura esistono infiniti riferimenti in moto l'uno rispetto all'altro che sono indistinguibili tramite qualsiasi esperimento fisico (meccanico o elettromagnetico) effettuato in essi.

Formuliamo quindi il *Postulato di Relatività*:

“Esistono infiniti sistemi di riferimento (SR) galileiani privilegiati, in ciascuno dei quali vale la geometria euclidea, è possibile misurare il tempo e definire la contemporaneità. Ciascuno di questi SR è un riferimento *completo* per i fenomeni fisici, nel quale si può costruire la cinematica classica. Gli infiniti riferimenti privilegiati sono *equivalenti* ai fini della descrizione delle leggi fisiche e si muovono di moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. È possibile stabilire la cinematica del moto relativo di questi riferimenti.”

Stabiliamo le conseguenze di questo postulato senza per il momento fare appello alla costanza della velocità della luce o ad alcun postulato dinamico. Notiamo in primo luogo che le leggi di trasformazione delle coordinate

$$x'_i = x'_i(x_j, t), \quad t' = t'(x_j, t)$$

devono essere lineari ed invertibili.

Per dimostrare la linearità è sufficiente l'ipotesi cinematica che il moto uniforme di un terzo SR appaia tale in entrambi i due SR che stiamo considerando.

Per l'isotropia dello spazio possiamo scegliere l'asse x come direzione del moto relativo e l'asse x' coincidente con l'asse x . Con argomenti puramente cinematici possiamo sincronizzare al tempo $t = t' = 0$ l'origine degli assi cartesiani dei due sistemi e dimostrare che si preserva l'ortogonalità. Analizzando le trasformazioni dei piani xz , xy e quella del piano yz all'istante $t = t' = 0$ possiamo ridurci a ricercare trasformazioni lineari del tipo:

$$x' = a_{11}x + a_{10}t, \quad y' = a_{22}y, \quad z' = a_{33}z \quad t' = a_{01}x + a_{00}t.$$

Consideriamo ora un punto solidale a SR' e avente $x' = 0$. Gli osservatori posti in SR vedono il punto muoversi su una retta parallela a x e coincidere con un punto del piano yz al tempo $t = 0$. La legge oraria di questo moto è $x = vt$, e pertanto deve valere

$$a_{11}vt + a_{10}t = 0,$$

da cui consegue

$$x' = a_{11}(x - vt), \quad y' = a_{22}y, \quad z' = a_{33}z \quad t' = a_{01}x + a_{00}t,$$

dove le a_{ij} possono essere funzioni di v . Per continuità ed invertibilità deve essere $a_{ii} > 0$ e per isotropia vale $a_{ii}(-v) = a_{ii}(v)$.

A questo punto possiamo derivare una legge di composizione delle velocità, notando che per un moto arbitrario $x = x(t)$, posto $u \equiv \frac{dx}{dt}$, si ottiene

$$u' \equiv \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{a_{11}(u - v)}{a_{01}u + a_{00}}.$$

Se invertiamo simultaneamente il moto arbitrario assegnato e il moto di SR', per isotropia ci aspettiamo che sia invertito anche il trasformato del moto assegnato, e pertanto

$$\frac{-a_{11}(-v)(u - v)}{-a_{01}(-v)u + a_{00}(-v)} = -u',$$

da cui usando i risultati precedenti si ottiene

$$a_{00}(v) = a_{00}(-v), \quad a_{01}(v) = -a_{01}(-v).$$

Notiamo poi che il moto relativo di SR rispetto a SR' è un moto con velocità $w = \phi(v)$ e per il principio di relatività $v = \phi(w)$, da cui la relazione $v = \phi(\phi(v))$ che, se imponiamo la condizione derivante dall'isotropia $\phi(-v) = -\phi(v)$, implica $\phi(v) = \pm v$.

Analizzando il moto di un terzo SR rispetto ai primi due e scambiando il ruolo di SR" rispetto a SR' otteniamo che $v \leftrightarrow u$ implica $u' \leftrightarrow \pm u'$. Ma la relazione di composizione delle velocità deve restare coerente, ovvero

$$\pm u' = \frac{a_{11}(u)(v-u)}{a_{01}(u)v + a_{00}(u)} = \pm \frac{a_{11}(v)(u-v)}{a_{01}(v)u + a_{00}(v)},$$

da cui si ricava facilmente che per ogni u, v deve valere

$$\frac{a_{01}(v)}{a_{11}(v)}u + \frac{a_{00}(v)}{a_{11}(v)} = \pm \frac{a_{01}(u)}{a_{11}(u)}v \pm \frac{a_{00}(u)}{a_{11}(u)}.$$

Ponendo in particolare $u = 0$ si ricava dalla precedente

$$\frac{a_{00}(v)}{a_{11}(v)} = \pm 1,$$

ma nel caso particolare $v = 0$ quest'ultima espressione vale 1 e pertanto, come del resto intuitivamente ovvio, $\phi(v) = -v$.

Ricaviamo quindi le seguenti fondamentali relazioni:

$$a_{00} = a_{11}, \quad \frac{a_{11}(v)}{a_{01}(v)}v = k,$$

dove k è una costante, per il momento arbitraria, indipendente da v .

Con ragionamenti analoghi, ma molto più semplici, si ricava $y' = a_{22}(v)y$, ma anche $y = a_{22}(-v)y'$, da cui $a_{22} = 1$, e analogamente $a_{33} = 1$. In conclusione

$$x' = a_{11}(x - vt), \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = a_{11}\left(\frac{v}{k}x + t\right),$$

da cui anche $x = \frac{x' + vt'}{a_{11}(1 + \frac{v^2}{k})}$. Ma per reciprocità deve valere $\frac{1}{a_{11}(1 + \frac{v^2}{k})} = a_{11}(-v) = a_{11}$ e di conseguenza

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{k}}}.$$

La forma più generale delle *trasformazioni di coordinate* che hanno l'asse x come direzione del moto relativo deducibile sotto la sola ipotesi del Postulato di Relatività è pertanto

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{k}}}, \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \frac{t + \frac{v}{k}x}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{k}}},$$

con la legge di composizione delle velocità

$$u' = \frac{u - v}{1 + \frac{uv}{k}}.$$

Notiamo che nel limite $k \rightarrow \infty$ otteniamo le trasformazioni di Galileo: pertanto la cinematica classica è coerente con il Postulato di Relatività.

Introduciamo a questo punto il *Postulato della costanza della velocità della luce* in tutti i sistemi di riferimento inerziali (e dell'indipendenza della velocità dalla sorgente). Richiediamo pertanto che la legge di trasformazione delle velocità risulti compatibile con la condizione $c' = c$:

$$c = \frac{c - v}{1 + \frac{cv}{k}},$$

che implica $k = -c^2$.

Otteniamo di conseguenza le *Trasformazioni di Lorentz*:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

che, introducendo la conveniente notazione

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

assumono la forma

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z \quad ct' = \gamma(ct - \beta x).$$

4. Conseguenze matematiche e fisiche delle trasformazioni di Lorentz

La quantità cinematica fondamentale della meccanica relativistica è l'*evento*, individuato dalle sue tre coordinate spaziali e dalla sua coordinata temporale in ciascun SR. La nozione classica di *simultaneità* è tuttavia strettamente legata alla nozione di tempo assoluto.

Se consideriamo due eventi situati in due punti separati x_1 e x_2 in un sistema di riferimento SR, e che avvengono allo stesso tempo t in quel particolare sistema di riferimento, e riesaminiamo gli stessi eventi in SR' che si muove con velocità v rispetto a SR, troviamo che gli eventi sopra menzionati avvengono in SR' rispettivamente ai tempi

$$t'_1 = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_1\right), \quad t'_2 = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_2\right),$$

da cui consegue che $t'_1 \neq t'_2$ se $x_1 \neq x_2$.

Ci si può convincere dell'accettabilità di questo risultato con un'analisi operativa del concetto di simultaneità: mentre è possibile definire in modo operativamente non ambiguo la sincronizzazione degli orologi all'interno di un SR assegnato, usando segnali luminosi inviati da un'"origine" arbitraria, la sincronizzazione non può essere mantenuta tra SR differenti.

Le misure fisiche di lunghezze e di tempi effettuate su oggetti in movimento risultano in generale differenti dalle corrispondenti misure effettuate su oggetti identici ma in quiete.

In particolare si registra una *contrazione delle lunghezze* dei corpi in movimento, che era stata già dedotta da Lorentz e Fitzgerald, prima dell'avvento della relatività einsteiniana, a partire dalle leggi delle interazioni elettromagnetiche, ma che in realtà vale per qualunque corpo, indipendentemente dalle interazioni che lo tengono insieme, e soprattutto è una proprietà *relativa*, e non una contrazione assoluta rispetto all'etere.

Consideriamo un'asta a riposo nel riferimento SR' e sia l_0 la sua lunghezza a riposo. Per definizione vale

$$l_0 = x'_2 - x'_1,$$

dove x'_1 e x'_2 sono le coordinate degli estremi dell'asta. Dalle trasformazioni di Lorentz risulta

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Definendo come lunghezza la distanza tra gli estremi *osservata a un certo istante* nel riferimento SR, allora posto $t_1 = t_2$ risulta

$$l = x_2 - x_1 = \sqrt{1 - \beta^2} l_0 < l_0.$$

La lunghezza misurata di un corpo è massima nel SR in cui il corpo è in quiete rispetto all'osservatore: l_0 si chiama anche *lunghezza propria*. Quando il corpo si muove esso si contrae di un fattore $\sqrt{1 - \beta^2}$ *nella direzione del moto*.

Un orologio in moto rispetto a un osservatore appare più lento di un orologio fermo rispetto all'osservatore stesso.

Consideriamo infatti un orologio fermo in x'_1 e misuriamo un intervallo di tempo Δt_0 tra due successive letture t'_1 e t'_2 :

$$\Delta t_0 = t'_2 - t'_1.$$

In SR due orologi diversi leggono rispettivamente

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

I due orologi sono sincronizzati ma collocati in posizioni diverse per risultare in coincidenza con il moto di SR'. Risulta quindi

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} > \Delta t_0.$$

Δt_0 si chiama intervallo di *tempo proprio*.

È possibile riconoscere la consistenza dei risultati fin qui dedotti con l'esperienza fisica mediante una serie di *esperienze ideali* (Gedankenexperimente).

1) Due osservatori in moto relativo confrontano aste ortogonali al moto all'istante della coincidenza degli assi. Gli osservatori sono in accordo sulla simultaneità delle osservazioni e, permettendo alle aste di lasciare un segno l'una sull'altra, possono accordarsi anche su quale delle due aste appare ad entrambi più corta.

Per il principio di relatività aste che sarebbero uguali se poste nello stesso SR devono quindi apparire uguali in questo confronto, altrimenti uno dei due SR sarebbe privilegiato rispetto all'altro.

2) Un osservatore in SR' invia un segnale luminoso a uno specchio in modo che il segnale viaggi perpendicolarmente alla direzione del moto relativo. L'intervallo di tempo misurato tra partenza e ritorno del segnale è $c\Delta t' = 2y'_0$.

Dal punto di vista di SR lo spazio percorso dal segnale è

$$l = 2\sqrt{y_0^2 + \frac{1}{4}v^2\Delta t^2}$$

ma per la costanza di c vale la relazione $l = c\Delta t$, da cui, uguagliando e risolvendo, segue la relazione $c\Delta t\sqrt{1 - \beta^2} = 2y_0$. Poiché dall'analisi precedente sappiamo che $y_0 = y'_0$ risulta

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

che è l'espressione che rappresenta il fenomeno della dilatazione dei tempi.

3) Un osservatore in SR' osserva una distanza l_0 in quiete nel riferimento SR passando a velocità v da un estremo all'altro. Il tempo impiegato nel passaggio, dal punto di vista di SR, è $\Delta t = \frac{l_0}{v}$.

Il tempo (proprio) impiegato dal punto di vista di SR' è, per i risultati precedenti, $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2}$. Risulta pertanto

$$\Delta t' = \frac{l_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{v} = \frac{l'}{v},$$

in quanto il segmento è in moto con velocità v (in modulo) rispetto a SR'.

Di conseguenza vale $l' = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$, che è l'espressione della contrazione di Lorentz delle lunghezze parallele al moto relativo.

4) Per la relatività della simultaneità gli orologi in moto, oltre che rallentare, appaiono anche sfasati in funzione della loro posizione secondo la relazione

$$t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x').$$

Esaminiamo il processo di sincronizzazione: A e B sono fermi a distanza l' in SR', e la sincronizzazione avviene inviando un segnale dal punto medio tra A e B.

In SR la distanza tra A e B vale $l' \sqrt{1 - \beta^2}$. A si muove nella direzione della sorgente del segnale, mentre B se ne allontana, e di conseguenza A fissa l'orologio a zero prima di B (relatività della simultaneità). Se il segnale viene emesso all'istante $t = 0$ risulta allora

$$ct_A = \frac{1}{2}l' \sqrt{1 - \beta^2} - vt_A, \quad ct_B = \frac{1}{2}l' \sqrt{1 - \beta^2} + vt_B,$$

e di conseguenza lo sfasamento vale

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{1}{2}l' \sqrt{1 - \beta^2} \left(\frac{1}{c - v} - \frac{1}{c + v} \right) = l' \frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

o anche, tenendo conto del rallentamento degli orologi in movimento, nel riferimento SR gli orologi appaiono sfasati di una quantità $\Delta t' = \frac{v l'}{c^2}$.

Possiamo a questo punto chiarire il ruolo dell'*osservatore* in meccanica relativistica: è un insieme di orologi distribuiti nello spazio, in quiete relativa e sincronizzati.

5. Le leggi di trasformazione delle velocità e dei vettori d'onda

Abbiamo già discusso il caso in cui le velocità siano dirette entrambe nella stessa direzione. Nel caso più generale consideriamo un moto arbitrario nel riferimento SR, con legge oraria $x_i = x_i(t)$, da cui per definizione

$$u_i = \frac{dx_i}{dt}.$$

Per effetto di una trasformazione di Lorentz otteniamo $x'_i = x'_i(t')$ e $t' = t'(t)$, da cui si ricava

$$u'_i = \frac{dx'_i}{dt'} = \frac{dx'_i}{dt} \frac{dt}{dt'}.$$

D'altronde differenziando le trasformazioni di Lorentz si ottiene

$$dx' = \gamma(dx - v dt), \quad dy' = dy \quad dz' = dz \quad dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2} dx\right)$$

e pertanto risulta subito

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)$$

da cui anche

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}.$$

Per il principio di relatività le relazioni inverse si ottengono dalle precedenti con la sostituzione $v \rightarrow -v$, come si verifica facilmente:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)}, \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)}.$$

Notiamo inoltre che vale la relazione

$$u'^2 = \frac{(u_x - v)^2 + (u_y^2 + u_z^2)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2}$$

e si dimostra che $u^2 \leq c^2$ implica $u'^2 \leq c^2$. quindi resta anche verificato che la velocità della luce non cambia per un cambiamento di sistema di riferimento. Si *postula* che nessun segnale possa propagarsi a velocità superiore a c .

Un'importante conseguenza delle relazioni precedenti è l'uguaglianza

$$\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)},$$

che si può anche scrivere nella forma compatta

$$\gamma(u') = \gamma(u)\gamma(v)\left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right).$$

Ricordiamo l'espressione della fase di un'onda piana che si propaga con velocità w e frequenza ν , essendo $\hat{\mathbf{n}}$ la direzione normale al fronte dell'onda:

$$\Phi = \nu(t - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}}{w}) = \nu'(t' - \frac{\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{r}'}{w'}),$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che la fase deve essere invariante per cambiamento di sistema di riferimento.

Detti α, α' gli angoli tra la direzione del moto di SR' e i versori $\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}'$ si ricavano quindi dalle trasformazioni di Lorentz le relazioni

$$\gamma\nu(1 - \cos\alpha\frac{v}{w}) = \nu', \quad \nu\frac{\sin\alpha}{w} = \nu'\frac{\sin\alpha'}{w'}, \quad \gamma\nu(\frac{\cos\alpha}{w} - \frac{v}{c^2}) = \nu'\frac{\cos\alpha'}{w'},$$

da cui risolvendo si ricava

$$\nu' = \gamma(1 - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}}{w})\nu, \quad \tan\alpha' = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \frac{vw}{c^2}},$$

$$w' = \frac{w - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{2wv}{c^2} \cos\alpha - \frac{v^2}{c^2} \sin^2\alpha + \frac{w^2v^2}{c^4}}}.$$

Notiamo che queste relazioni sono le stesse che avremmo ottenuto per la trasformazione della velocità e della direzione di propagazione di una particella dotata di velocità $u = \frac{c^2}{w}$ e $u' = \frac{c^2}{w'}$ rispettivamente nei due sistemi di riferimento.

Quest'analogia sta alla base dell'interpretazione di De Broglie del comportamento ondulatorio delle particelle, alle quali è attribuita una velocità di fase pari a $w = \frac{c^2}{u}$, dove u è la velocità ordinaria (o di gruppo). Notiamo anche la coincidenza dei due valori nel caso $u = w = c$, nel qual caso risulta anche $u' = w' = c$.

Come in meccanica classica, la velocità di raggio di un'onda trasforma allo stesso modo delle velocità dei punti materiali.

Discutiamo ora l'effetto *Doppler relativistico*. Data una sorgente luminosa in quiete in SR, essa appare in movimento in SR'. Dall'analisi della trasformazione delle caratteristiche di un'onda ricaviamo, nel caso di onde elettromagnetiche nel vuoto

$$\nu' = \gamma(1 - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}}{c})\nu, \quad \tan\alpha' = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \frac{v}{c}}.$$

In particolare se l'onda è emessa nella direzione del moto di SR' si ha l'effetto Doppler *longitudinale*:

$$\nu' = \gamma(1 - \frac{v}{c})\nu = \frac{1}{\gamma(1 + \frac{v}{c})}\nu = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}\nu.$$

Se invece che il moto risulta ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda si ha l'effetto Doppler *trasversale*:

$$\nu' = \gamma\nu.$$

Questo effetto, che dell'ordine di $\frac{v^2}{c^2}$, è completamente assente in meccanica classica, e si riconduce semplicemente al fenomeno della dilatazione degli intervalli di tempo.

6. Cinematica relativistica

Consideriamo ora la più generale trasformazione omogenea di coordinate, dove omogeneità significa coincidenza delle origini ($O = O'$) al tempo $t = 0$. Questa trasformazione è esprimibile mediante le relazioni

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \gamma(v)(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t), \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}, \quad t' = \gamma(v)\left(t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c^2}\right),$$

ma, in quanto trasformazione lineare, si può anche rappresentare mediante la notazione matriciale

$$x'_i = \sum_{k=0}^3 A_{ik} x_k,$$

avendo introdotto la notazione $x_0 \equiv ct$.

Notiamo che un generico evento visto nel sistema di riferimento SR risulta caratterizzato dall'insieme di valori x_i ($i = 0, 1, 2, 3$), mentre lo stesso evento visto in SR' è caratterizzato dai valori x'_i .

Esiste una particolare classe di eventi, che consiste nel passaggio di un treno d'onda elettromagnetica emesso all'origine degli assi all'istante $t = t' = 0$, e per la quale sappiamo che vale:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 = x_0^2,$$

ma vale anche

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 = x_0'^2.$$

Per un evento arbitrario si può invece definire

$$s^2 = x_0^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

$$s'^2 = x_0'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2.$$

Ma notiamo che ad ogni insieme di variabili che rende $s^2 = 0$ corrisponde un insieme che rende $s'^2 = 0$, e poiché la connessione è lineare e deve valere il principio di relatività risulta di conseguenza $s'^2 = s^2$.

s è una quantità che non cambia per trasformazioni di Lorentz e si chiama *intervallo* tra l'evento individuato da x_i e l'origine. È semplice verificare che la forma più generale delle trasformazioni di coordinate che abbiamo derivato dal postulato di relatività è coerente con l'invarianza di $\mathbf{r}^2 + kt^2$, che si riduce al risultato precedente facendo uso della relazione $k = -c^2$.

È conveniente introdurre una formulazione differenziale, considerando l'intervallo tra due eventi infinitamente vicini e ricavando la relazione

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds'^2.$$

ds^2 è una *distanza* nello spazio a quattro dimensioni le cui coordinate sono x_i (*spazio di Minkowski*). ds^2 però non condivide con la distanza ordinaria la proprietà di definitezza del segno. Risulta infatti che ds^2 può anche essere negativo, e $ds^2 = 0$ non implica la coincidenza degli eventi.

Il luogo dei punti tali che $s^2 = 0$ è un'ipersuperficie, detta *cono-luce*, che divide lo spazio di Minkowski in tre regioni disconnesse. Notiamo che è possibile rappresentare graficamente tale spazio associando una coordinata ordinaria alla direzione x_0 . In particolare è utile analizzare gli eventi sul piano (x, ct) , sul quale il cono-luce è rappresentato da due rette passanti per l'origine e orientate a formare un angolo di $\pm \frac{\pi}{4}$ con gli assi coordinati. Le superficie a s^2 costante sono iperboli asintotiche al cono-luce.

Notiamo che gli eventi la cui separazione soddisfa $ds^2 > 0$ godono della proprietà $|\frac{d\mathbf{r}}{dt}| < c$ e pertanto esiste un SR', in moto con velocità $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ rispetto a SR, nel quale gli eventi appaiono avvenire nella stessa posizione a tempi diversi. Gli eventi in oggetto possono quindi essere collegati da un segnale fisicamente possibile e quindi da un rapporto di causa ed effetto (uno dei due eventi avviene prima dell'altro in tutti i SR ammissibili).

Viceversa se vale $ds^2 < 0$ allora $|\frac{d\mathbf{r}}{dt}| > c$, ma scegliendo un riferimento in moto con velocità $c^2/|\frac{d\mathbf{r}}{dt}|^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ è possibile avere $dt' = 0$. Pertanto esiste un SR' nel quale i due eventi sono simultanei, e ciò implica che non è possibile tra loro una connessione causale.

Nel caso limite $ds^2 = 0$ i due eventi sono collegabili soltanto con un segnale che viaggia alla velocità della luce.

Le relazioni di tutti gli eventi possibili con un evento dato possono quindi essere raggruppate nel modo seguente:

- eventi tali che $ds^2 \geq 0$ e $dt < 0$: si trovano all'interno del cono-luce inferiore e costituiscono il *passato* dell'evento dato;
- eventi tali che $ds^2 < 0$: si trovano fuori dal cono-luce e costituiscono il *presente* ovvero l'*altrove* (insieme degli eventi ininfluenti e sui quali non è possibile influire);
- eventi tali che $ds^2 \geq 0$ e $dt > 0$: si trovano all'interno del cono-luce superiore e costituiscono il *futuro* dell'evento dato.

Consideriamo ora un punto materiale (*particella*) in moto con legge oraria $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ in un SR dato. Nel riferimento SR' in cui la particella è istantaneamente in quiete vale

$$d\mathbf{r}' = 0, \quad dt' = d\tau.$$

Per l'invarianza di ds^2 risulta di conseguenza

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2,$$

ovvero ricordando che $d\mathbf{r} = \mathbf{u} dt$, dove \mathbf{u} è la velocità istantanea della particella, vale

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt.$$

Definiamo $d\tau$ come la variazione infinitesima della quantità τ , *tempo proprio* della particella in esame: $d\tau$ è un invariante relativistico, ossia non dipende dalla scelta del sistema di riferimento.

La rappresentazione grafica sul piano (x, ct) della legge oraria di una particella è una linea continua che si definisce *linea d'universo* della particella stessa. Poiché $|\mathbf{u}| < c$ la linea d'universo di una particella si trova sempre all'interno del cono-luce istantaneo che può essere definito in relazione a ciascuno dei punti della linea stessa.

Possiamo ora discutere il cosiddetto “*paradosso dei gemelli*”. Consideriamo due orologi A e B di cui uno fermo in un SR inerziale (la Terra) e l’altro fermo in un SR’ (il razzo) in moto rispetto al primo con velocità v . Le posizioni e i tempi dei due orologi coincidono quando essi si trovano all’origine $O = O'$ all’istante $t = t' = 0$. L’orologio in moto raggiunge un terzo orologio solidale con SR a un tempo $t_T = \gamma t_R$, dove per definizione t_R è il tempo proprio dell’orologio che ha viaggiato. Se ora l’orologio cambia la direzione del suo movimento e, sempre a velocità v , ritorna a Terra, all’istante della coincidenza con la posizione iniziale il tempo segnato dall’orologio in movimento è $2t_R$ mentre quello dell’orologio in quiete è $2t_T = 2\gamma t_R$.

L’apparente violazione del principio di relatività è spiegata dal fatto che uno solo dei due orologi rimane sempre fermo nello stesso SR, mentre l’altro, al momento dell’inversione di rotta, cambia da SR’ a SR” (fisicamente subisce un’accelerazione e pertanto la sua “storia” non è assimilabile a quella di un osservatore inerziale).

Il fattore γ che compare tra t_T e t_R è lo stesso che descrive la dilatazione dei tempi, l’effetto Doppler trasversale e la relazione tra tempo proprio e tempo di SR.

Il risultato del calcolo ora effettuato può essere riprodotto nell’ambito della relatività generale senza introdurre alcuna singolarità nella traiettoria e corrisponde a un effetto fisico *vero* che può essere misurato ad esempio in esperimenti con aerei in volo concorde o discorde con la rotazione della Terra, e quindi con velocità di rotazione “assolute” differenti (Hafele e Keating, 1971).

Si può in generale applicare la relazione

$$\Delta\tau = \int_{\tau(t_1)}^{\tau(t_2)} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}} dt \leq \Delta t \equiv t_2 - t_1.$$

Se nella più generale trasformazione di Lorentz omogenea imponiamo la condizione di invarianza dell’intervallo, allora definendo la matrice diagonale η_{ij} , i cui autovalori sono (1,-1,-1,-1), si ottengono le relazioni

$$\sum_{ij} \eta_{ij} x'_i x'_j = \sum_{ijkl} \eta_{ij} A_{ik} A_{jl} x_k x_l = \sum_{kl} \eta_{kl} x_k x_l.$$

Poichè queste relazioni devono valere per ogni scelta di x_k , la più generale trasformazione di Lorentz omogenea deve soddisfare

$$\sum_{ij} \eta_{ij} A_{ik} A_{jl} = \eta_{kl}.$$

Questa condizione è molto simile a quella che vale per il gruppo delle rotazioni euclidee in quattro dimensioni $O(4)$; in realtà si tratta in questo caso di un gruppo di trasformazioni in uno spazio complesso a 3+1 dimensioni.

Notiamo che la condizione trovata fissa il modulo, ma non il segno del determinante della matrice A_{ik} . Le trasformazioni a determinante 1 si dicono *trasformazioni proprie*. Considerando il caso del determinante -1 è possibile includere le *riflessioni* (trasformazioni di parità) tra le trasformazioni di Lorentz. Le trasformazioni ad assi paralleli e velocità parallela a uno degli assi che abbiamo visto finora si dicono *trasformazioni speciali*.

La matrice A_{ik} definisce le proprietà di trasformazione di un vettore definito nello spazio di Minkovski (*quadrivettore*).

Introduciamo ora la notazione standard della meccanica relativistica: indici greci per le quantità a quattro componenti, convenzione della somma sugli indici ripetuti, indici covarianti e controvarianti per indicare la somma con la metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$.

Un vettore che si trasforma come il vettore degli spostamenti dx^μ è un vettore *controvariante*

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = A^\mu_\nu dx^\nu.$$

Un vettore che si trasforma come la derivata vettoriale (gradiente) $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ è un vettore *covariante*:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = A^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}.$$

Notiamo la proprietà delle trasformazioni di Lorentz

$$A^\mu_\nu A^\nu_{\mu'} = \delta^\mu_{\mu'},$$

che definisce la trasformazione inversa.

Il *tensore metrico* η gode della proprietà $\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu$ e pertanto può essere utilizzato per alzare e abbassare gli indici:

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu}V^\nu, \quad A^\nu_\mu = \eta_{\mu\mu'}\eta^{\nu\nu'}A^{\mu'}_{\nu'}, \quad \eta_{\mu\nu}A^\mu_{\mu'}A^{\nu\nu'} = \eta_{\mu'\nu'}.$$

Si può definire un *prodotto scalare* (invariante)

$$\eta_{\mu\nu}V^\mu W^\nu = V_\nu W^\nu = V^\mu W_\mu$$

e in particolare $dx_\mu dx^\mu$ è l'intervallo (infinitesimo) ds^2 .

Si possono definire tensori di rango più elevato (*quadrivettersi*) con proprietà di trasformazione del tipo

$$T'^{\mu\nu} = A^\mu_{\mu'}A^\nu_{\nu'}T^{\mu'\nu'}$$

con ovvie generalizzazioni. Contrazioni tra indici di tensori producono tensori di rango più basso; ad esempio $T^{\mu\nu}V_\nu$ è un vettore controvariante.

La condizione $\det A^\mu_\nu = 1$ implica che lo Jacobiano dei cambiamenti di coordinate è 1 e pertanto l'*elemento di quadrivolume* d^4x è invariante. Il principio di relatività applicato alla dinamica può tradursi nella richiesta che le leggi della fisica abbiano la stessa forma nei differenti SR inerziali, ovvero che esse ammettano una *formulazione covariante* in termini di quadrivettersi e quadrivettersi.

Completiamo l'analisi della cinematica relativistica utilizzando le nozioni sin qui introdotte per definire *quadrivelocità* e *quadriaccelerazione*. A tal fine osserviamo che, essendo dx^μ un quadrivettore infinitesimo controvariante e $d\tau$ (variazione di tempo proprio) una quantità invariante per trasformazioni di Lorentz, è possibile definire il quadrivettore quadrivelocità

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau},$$

tangente alla linea d'universo di una particella la cui legge oraria può essere scritta nella forma $x^\mu = x^\mu(\tau)$.

La proprietà fondamentale della quadrivelocità è la relazione

$$u_\mu u^\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = c^2.$$

Ricordando che $\frac{dt}{d\tau} = \gamma(u)$ è facile ottenere le componenti di u^μ :

$$u^\mu \equiv (\gamma(u)c, \gamma(u)\mathbf{u}),$$

dove $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ è la velocità ordinaria della particella.

Dalla formula di trasformazione dei quadrivettori $u'^\mu = A^\mu_\nu u^\nu$ è facile riottenere le relazioni di composizione relativistica delle velocità.

In modo del tutto analogo si può definire il quadrivettore quadriaccelerazione:

$$a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2},$$

con la fondamentale proprietà $a_\mu u^\mu = 0$.

È possibile ottenere la rappresentazione in componenti della quadriaccelerazione nella forma

$$a^\mu \equiv \left(\gamma^4 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c}, \gamma^2 \mathbf{a} + \gamma^4 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c} \frac{\mathbf{u}}{c} \right),$$

dove $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ è l'accelerazione ordinaria della particella. La trasformazione delle accelerazioni si può ricavare dalla relazione $a'^\mu = A^\mu_\nu a^\nu$.

Un'altra importante quantità covariante è il *quadrivettore d'onda* k^μ . Scrivendo la fase (invariante) come $\Phi = k_\mu x^\mu$ risulta

$$k^\mu \equiv \left(\frac{\nu}{c}, \frac{\nu \hat{\mathbf{n}}}{w} \right)$$

e per un'onda elettromagnetica nel vuoto $w = c$ e $k_\mu k^\mu = 0$.

7. Dinamica relativistica

La dinamica newtoniana è incoerente con la relatività einsteiniana perchè le sue leggi sono invarianti sotto trasformazioni di Galileo e non di Lorentz.

Un'altra, e più profonda, difficoltà è legata all'idea di azione a distanza, presente ad esempio nella teoria di Newton della gravitazione e incompatibile in relatività con il principio di azione e reazione a causa della relatività della simultaneità.

Per determinare le necessarie modificazioni potremmo studiare le interazioni elettromagnetiche (le equazioni di Maxwell sono covarianti di Lorentz) o più semplicemente analizzare i processi d'urto, per i quali non si pone un problema di simultaneità.

Procediamo euristicamente considerando la collisione elastica di due punti materiali uguali, prima nel riferimento simmetrico in cui essi si muovono con velocità uguali e opposte, poi in un riferimento in cui la particella A si muove perpendicolarmente al piano di collisione.

Indichiamo in generale con lettere minuscole le quantità misurate prima dell'urto e con le maiuscole quantità misurate dopo l'urto.

Nel riferimento simmetrico SR, assumendo la sola invarianza per parità e inversioni temporali della dinamica, il processo sarà descritto dalle relazioni

$$\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B = 0, \quad \mathbf{U}_A + \mathbf{U}_B = 0$$

e per le simmetrie del processo vale anche

$$\begin{aligned} u_{Ax} &= U_{Ax}, & u_{Ay} &= -U_{Ay}, \\ u_{Bx} &= U_{Bx}, & u_{By} &= -U_{By}. \end{aligned}$$

Il riferimento SR', per ipotesi, si muove con velocità $v = u_{Ax} = -u_{Bx}$ rispetto al riferimento SR. Applichiamo le trasformazioni di Lorentz alle velocità, ottenendo

$$\begin{aligned} u'_{Ax} &= U'_{Ax} = 0, & u'_{Ay} &= -U'_{Ay} = \gamma(v)u_{Ay}, \\ u'_{Bx} &= U'_{Bx} = -\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}, & u'_{By} &= -U'_{By} = \gamma(v)\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2}}u_{By}. \end{aligned}$$

Scriviamo ora formalmente la conservazione dell'impulso nel riferimento SR':

$$m'_A \mathbf{u}'_A + m'_B \mathbf{u}'_B = m'_A \mathbf{U}'_A + m'_B \mathbf{U}'_B,$$

dove abbiamo introdotto *masse relativistiche* m' per tener conto delle possibili modificazioni dell'inerzia delle particelle dovute al moto, che in questo riferimento non è lo stesso per A e B.

Notiamo che la componente x della legge di conservazione è comunque soddisfatta per ogni scelta di m' , mentre per la componente y deve necessariamente valere

$$m'_A u'_{Ay} + m'_B u'_{By} = 0$$

ovvero

$$\gamma(v) \left(m'_A u_{Ay} + m'_B \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} u_{By} \right) = 0.$$

Ma ricordiamo che vale $u_{Ay} + u_{By} = 0$, e pertanto verifichiamo immediatamente che non può valere il risultato classico $m'_A = m'_B = m_0$, dove m_0 è la massa inerziale a riposo: la conservazione dell'impulso è incompatibile con la forma classica della sua dipendenza dalla massa a riposo e dalla velocità.

Notiamo tuttavia che valgono le seguenti relazioni:

$$\gamma'_A \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_{Ax} + u'^2_{Ay}}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \frac{u^2_{Ay}}{c^2}}},$$

$$\gamma'_B \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_{Bx} + u'^2_{By}}{c^2}}} = \frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2 \frac{u^2_{By}}{c^2}}}.$$

Pertanto la richiesta che valga in SR' la conservazione dell'impulso nella direzione y può essere ricondotta alla condizione

$$\frac{m'_A}{\gamma'_A} \frac{u_{Ay}}{\sqrt{1 - \gamma^2 \frac{u^2_{Ay}}{c^2}}} + \frac{m'_B}{\gamma'_B} \frac{u_{By}}{\sqrt{1 - \gamma^2 \frac{u^2_{By}}{c^2}}} = 0,$$

da cui ricordando ancora una volta che $u_{Ay} + u_{By} = 0$ ci si riduce a

$$\frac{m'_A}{\gamma'_A} - \frac{m'_B}{\gamma'_B} = 0.$$

Quest'equazione funzionale, se imponiamo che nel limite $u_{Ay} \rightarrow 0$ valga la relazione classica $m'_A = m_0$, ammette come unica soluzione $m'_A = \gamma'_A m_0$.

Possiamo quindi mantenere invariata in forma la legge classica della conservazione dell'impulso se introduciamo il concetto di *massa propria*, o *massa a riposo* m_0 di una particella, che è il valore della massa nel riferimento in cui essa è in quiete, e il concetto di *massa relativistica* $m(u)$, dipendente dalla velocità u della particella rispetto a SR e legata alla massa a riposo dalla relazione

$$m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

L'*impulso* relativistico della particella è pertanto

$$\mathbf{p} = m(u)\mathbf{u} = m_0\gamma(u)\mathbf{u}.$$

Notiamo che la massa relativistica può essere intesa come una misura dell'inerzia di una particella. Pertanto il fatto che $m(u)$ cresca rapidamente con u e tenda ad infinito nel limite $u \rightarrow c$ può dare una spiegazione "intuitiva" dell'irraggiungibilità della velocità della luce per particelle materiali.

Introduciamo ora le legge relativistica delle forze:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_0\gamma\mathbf{u}) = m_0\gamma\mathbf{a} + m_0\frac{d\gamma}{dt}\mathbf{u}$$

e grazie alla relazione

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2}$$

otteniamo anche

$$\mathbf{F} = m\left(\mathbf{a} + \gamma^2 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \mathbf{u}\right).$$

Deriviamo quindi il teorema relativistico dell'*energia*:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d\varepsilon$$

assumendo come definizione di ε la relazione

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = m\gamma^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = m_0 c^2 \frac{d\gamma}{dt}.$$

Scegliendo di porre a zero la costante d'integrazione si ottiene quindi subito

$$\varepsilon = m_0\gamma c^2 = m(u)c^2.$$

Da questa scelta discende il fatto che, anche nel limite non relativistico $u \ll c$, la quantità ε differisce dall'energia cinetica classica $\frac{1}{2}m_0u^2$ per una quantità $\varepsilon_0 \equiv m_0c^2$ che viene chiamata *energia a riposo*. L'energia relativistica ε è una misura diretta della massa inerziale (relativistica) di una particella, e tende a infinito per $u \rightarrow c$.

È facile ricavare una relazione integrale e una differenziale tra energia e impulso, valide in tutti i sistemi di riferimento:

$$\varepsilon = \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} c, \quad \frac{d\varepsilon}{d\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{\varepsilon} c^2 = \mathbf{u}.$$

Si può anche riformulare la relazione tra forza e accelerazione nelle forme

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} + \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \mathbf{u},$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} - \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{mc^2} \mathbf{u}.$$

In generale \mathbf{F} e \mathbf{a} non sono parallele. Un caso semplice è quello di \mathbf{F} parallela a \mathbf{u} , e quindi ad \mathbf{a} , secondo la relazione

$$F_{\parallel} = m_0\gamma^3 a_{\parallel}.$$

La quantità $m_{\parallel} \equiv m_0\gamma^3$ è detta *massa longitudinale*.

Un altro caso semplice si ha per \mathbf{F} perpendicolare a \mathbf{u} , per cui \mathbf{F} risulta parallela ad \mathbf{a} e vale la relazione

$$F_{\perp} = m_0\gamma a_{\perp}.$$

La quantità $m_{\perp} \equiv m_0\gamma$ è detta *massa trasversa*. Notiamo in questo caso che, poichè $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0$, u^2 risulta costante e pertanto la massa trasversa è in questo caso un invariante del moto.

8. Leggi di trasformazione delle quantità dinamiche

Determiniamo ora le leggi relativistiche per la trasformazione delle quantità dinamiche. Consideriamo a tal fine una particella la cui massa a riposo sia m_0 e la cui velocità sia \mathbf{u} in SR e \mathbf{u}' in SR', sapendo che SR' è in moto con velocità \mathbf{v} rispetto a SR.

Valgono le relazioni per la massa relativistica:

$$m = m_0\gamma(u), \quad m' = m_0\gamma(u'),$$

e inoltre abbiamo già dimostrato la relazione

$$\gamma(u') = \gamma(v)\gamma(u)\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}\right).$$

Possiamo quindi stabilire la legge di trasformazione della massa relativistica per cambiamenti di sistema di riferimento:

$$m' = m\gamma(v)\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}\right)$$

e l'inversa

$$m = m'\gamma(v)\left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2}\right).$$

Chiaramente queste relazioni permettono di ricavare immediatamente la legge di trasformazione relativistica dell'energia:

$$\varepsilon' = \gamma(\varepsilon - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}).$$

Dalle definizioni e dalle leggi di trasformazione delle velocità si ricavano le leggi di trasformazione dell'impulso:

$$p'_x = m'u'_x = m\gamma\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}\right)\left(\frac{u_x - v}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}}\right) = m\gamma(u_x - v) = \gamma(p_x - \frac{v\varepsilon}{c^2}),$$

$$p'_y = m'u'_y = m\gamma\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}\right)\frac{1}{\gamma}\left(\frac{u_y}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}}\right) = mu_y = p_y$$

e analogamente si dimostra $p'_z = p_z$. Le relazioni inverse si possono ottenere anche dal principio di relatività.

Notiamo che vale l'importante conseguenza

$$\frac{\varepsilon'^2}{c^2} - p'^2 = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2.$$

Notiamo inoltre che le relazioni dedotte per le trasformazioni di Lorentz speciali di energia e impulso sono del tutto analoghe alle corrispondenti relazioni per le trasformazioni del tempo e delle coordinate. La generalizzazione a trasformazioni generali di Lorentz è pertanto, come vedremo, completamente equivalente.

Le leggi di trasformazione della forza possono essere dedotte da quelle dell'impulso imponendo l'invarianza in forma delle equazioni del moto:

$$\mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{p}'}{dt} \frac{dt}{dt'},$$

dove \mathbf{p}' è una funzione di \mathbf{p} ed ε e possiamo utilizzare le relazioni

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \quad \frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}\right).$$

Per trasformazioni speciali di Lorentz si ottiene quindi

$$F'_x = \frac{F_x - \frac{v}{c^2}\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}}, \quad F'_y = \frac{F_y}{\gamma\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}\right)}, \quad F'_z = \frac{F_z}{\gamma\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}\right)}.$$

In meccanica relativistica il concetto di forza non ha un significato indipendente dal sistema di riferimento.

Anche l'espressione della potenza ha una sua legge di trasformazione:

$$\mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}}.$$

È interessante osservare che, per una particella istantaneamente in quiete nel riferimento SR', poiché $u' = 0$, valgono le relazioni

$$F_x = F'_x, \quad F_y = \frac{1}{\gamma} F'_y, \quad F_z = \frac{1}{\gamma} F'_z$$

e pertanto la forza nel riferimento di quiete istantanea è più grande che in qualunque altro sistema di riferimento.

È facile convincersi che i risultati precedenti possono essere formulati in maniera compatta e covariante introducendo la nozione di *quadrimpulso*:

$$p^\mu = m_0 u^\mu.$$

Le componenti del quadrimpulso sono $(m_0 \gamma c, m_0 \gamma \mathbf{u})$, ovvero

$$p^\mu \equiv \left(\frac{\varepsilon}{c}, \mathbf{p} \right),$$

e vale l'invarianza del prodotto scalare

$$p_\mu p^\mu = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m_0^2 c^2$$

e la legge di trasformazione dei vettori controvarianti $p'^\mu = A^\mu_\nu p^\nu$.

Derivando rispetto al tempo proprio possiamo introdurre la nozione di *quadriforza*:

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = m_0 a^\mu$$

con la rappresentazione in componenti

$$F^\mu \equiv \left(\gamma \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{c}, \gamma \mathbf{F} \right).$$

Notiamo che la quarta componente delle equazioni del moto ha la forma

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\varepsilon}{c} \right) = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon}{c} \right) = \gamma \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{c},$$

e quindi esprime il teorema dell'energia $\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$.

Le leggi di trasformazione della forza si deducono dalle leggi di trasformazione della quadriforza $F'^\mu = A^\mu_\nu F^\nu$.

Notiamo la fondamentale proprietà della quadriforza, valida per particelle dotate di massa a riposo costante:

$$F^\mu u_\mu = 0.$$

Più in generale, per sistemi con massa a riposo variabile, si può estendere la nozione di forza ottenendo la relazione

$$F^\mu u_\mu = \frac{dm_0}{d\tau} c^2.$$

Vale la pena di osservare a questo punto che il quadrimpulso $p^\mu = (\frac{\varepsilon}{c}, \mathbf{p})$ e il quadrivettore d'onda $k^\mu = (\frac{\nu}{c}, \frac{\nu}{w} \hat{\mathbf{n}})$, dove $w = \nu \lambda$, obbediscono alle stesse leggi di trasformazione.

È pertanto formalmente possibile associare in modo invariante all'impulso di una particella un vettore d'onda, detto *onda di De Broglie*, e generalizzare quindi alle particelle e ai loro impulsi le relazioni di Planck tra energia e frequenza di un quanto di luce $\varepsilon = h\nu$.

Stabiliamo quindi la relazione

$$p^\mu = hk^\mu,$$

dove h è un invariante relativistico, e in componenti si ottiene

$$\varepsilon = h\nu, \quad \mathbf{p} = h\frac{\nu}{w}\hat{\mathbf{n}} = \frac{h}{\lambda}\hat{\mathbf{n}}.$$

Si ottengono dalle precedenti le fondamentali relazioni

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad w = \frac{\varepsilon}{p} = \frac{c^2}{u}$$

e si riconosce l'interpretazione di w come *velocità di fase* della particella.

Un caso limite particolarmente interessante è quello in cui il quadrivettore d'onda corrisponde a un'onda elettromagnetica, ovvero $w = c$. In questo caso alla condizione $k_\mu k^\mu = 0$ corrisponde il vincolo $p_\mu p^\mu = 0$. Di conseguenza, nel quadro dell'interpretazione di De Broglie (e quindi nel quadro della meccanica quantistica), alla propagazione di un'onda elettromagnetica si può pensare associata la propagazione di una *particella a massa propria nulla*, il *fotone*, che viaggia necessariamente alla velocità della luce e soddisfa le relazioni

$$\varepsilon = pc = h\nu.$$

9. Meccanica relativistica nel formalismo lagrangiano e hamiltoniano

È possibile estendere al caso relativistico le analisi fin qui effettuate. Consideriamo in primo luogo il caso di particelle libere relativistiche, per le quali l'energia (cinetica) soddisfa la relazione $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ e pertanto si può assumere

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}},$$

e risulta $\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}$, da cui subito $H = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}$.

Consideriamo ora il caso di particelle soggette a forze, che potranno essere in generale anche dipendenti dalla velocità, come nel caso della forza di Lorentz. Nel limite non relativistico, come sappiamo, vale

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e\Phi + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v},$$

da cui si ottiene per i momenti coniugati la relazione $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$, e quindi

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + e\Phi = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\Phi,$$

e si nota che l'Hamiltoniana dipende esplicitamente da \mathbf{A} , anche se il termine contenente la dipendenza è puramente cinetico.

La generalizzazione al caso relativistico è a questo punto naturale:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} - e\Phi + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v},$$

da cui $\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$ e di conseguenza

$$H = c\sqrt{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + m^2 c^2} + e\Phi.$$

Possiamo ora scrivere questo risultato in notazione relativistica, ponendo $\Phi \equiv A^0$ e $H \equiv cP^0$, $\mathbf{p} \equiv \mathbf{P}$. In primo luogo si osserva che il principio di Hamilton può essere espresso in forma relativisticamente invariante, in quanto

$$I = \int L dt = - \int [mc^2 + \frac{e}{c}A_\mu U^\mu] d\tau.$$

Vale poi

$$P^0 - \frac{e}{c}A^0 = \sqrt{\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + m^2 c^2},$$

da cui subito si deduce la relazione invariante

$$\left(P^\mu - \frac{e}{c}A^\mu\right)^2 = m^2 c^2.$$

Notiamo quindi che nel caso di particelle cariche in campo elettromagnetico le componenti del quadrimomento P^μ non si identificano con il quadrimpulso mU^μ delle particelle libere, e la differenza $\frac{e}{c}A^\mu$ tra le due quantità può essere interpretata come energia-impulso associata al campo elettromagnetico.

È anche possibile dare una formulazione completamente covariante della meccanica relativistica, trattando tempo e spazio allo stesso modo e introducendo una Lagrangiana invariante L' scalare per trasformazioni di Lorentz.

Le equazioni di Eulero-Lagrange di $L' = L'(X^\mu, U^\mu, \tau)$ prendono la forma

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L'}{\partial U_\mu} \right) - \frac{\partial L'}{\partial X_\mu} = 0.$$

Nel caso della particella libera si può scegliere $L' = \frac{1}{2}mU_\mu U^\mu$, (ignorando il vincolo $U_\mu U^\mu = c^2$), e ottenere quindi

$$\frac{\partial L'}{\partial U_\mu} = mU^\mu \equiv P^\mu, \quad \frac{\partial L'}{\partial X_\mu} = 0.$$

La generalizzazione a particelle interagenti è banale:

$$L' = \frac{1}{2}mU_\mu U^\mu + \frac{e}{c}U_\mu A^\mu,$$

da cui la relazione

$$\frac{\partial L'}{\partial U_\mu} = mU^\mu + \frac{e}{c}A^\mu \equiv P^\mu.$$

Le equazioni di Lagrange prendono quindi la forma

$$\frac{d}{d\tau} \left(mU^\mu + \frac{e}{c}A^\mu \right) - \frac{\partial}{\partial X_\mu} \left(\frac{e}{c}U_\nu A^\nu \right) = 0.$$

che esprime in modo covariante la legge della quadriforza di Lorentz.

Nel formalismo hamiltoniano risulta quindi in questo caso

$$H' = P_\mu U^\mu - L' = \frac{1}{2}mU_\mu U^\mu = \frac{1}{2m} \left(P_\mu - \frac{e}{c}A_\mu \right)^2.$$

Le equazioni canoniche di quest'Hamiltoniana invariante (che in quanto tale *non* coincide con l'energia) sono

$$\frac{\partial H'}{\partial P_\mu} = \frac{dX^\mu}{d\tau}, \quad \frac{\partial H'}{\partial X_\mu} = -\frac{dP^\mu}{d\tau},$$

e infatti vale in particolare

$$\frac{\partial H'}{\partial P_\mu} = \frac{1}{m} \left(P^\mu - \frac{e}{c}A^\mu \right) = U^\mu.$$

La componente spaziale delle equazioni per $\frac{dP^\mu}{d\tau}$ riproduce le equazioni del moto, mentre la componente temporale $\frac{\partial H'}{\partial X_0} = -\frac{dP^0}{d\tau}$ implica $\frac{\partial H'}{\partial t} = -\gamma \frac{dH}{dt}$. Ma dalle definizioni segue la relazione

$$\frac{\partial H'}{\partial t} = -\frac{1}{mc} \left(P^0 - \frac{e}{c}A^0 \right) \frac{\partial H}{\partial t}$$

e poiché $P^0 - \frac{e}{c}A^0 = mc\gamma$ si ottiene subito $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$

10. Equivalenza di massa ed energia

In meccanica classica la definizione di centro di massa di un sistema di particelle e l'analisi delle sue proprietà dinamiche ci permettono di convincerci della fondatezza (autoconsistenza) della nozione di *punto materiale*.

Allo stesso modo in meccanica relativistica dobbiamo convincerci che è possibile definire in modo coerente massa, energia e impulso di un sistema complesso, in quanto non possiamo definire *a priori* la natura elementare di un sistema.

In particolare dovremo convincerci che la relazione tra massa ed energia valida per una singola particella si generalizza

- a includere l'energia cinetica interna di un sistema di particelle nella definizione di massa propria del sistema;
- a includere qualsiasi altro tipo di energia nella definizione stessa di massa propria.

Consideriamo dapprima un sistema di particelle libere e definiamo impulso ed energia tramite:

$$E = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{(i)}, \quad \mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{(i)},$$

dove per linearità le proprietà di trasformazione di $(\frac{E}{c}, \mathbf{P})$ sono quelle dei quadrimpulsi.

La legge di conservazione di $(\frac{E}{c}, \mathbf{P})$ include tutti i processi di urto elastico.

Consideriamo l'invariante $\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{P}^2$ e notiamo che, dalla relazione

$$\frac{1}{c^2} \left(\sum_i \varepsilon_{(i)} \right)^2 \equiv \left(\sum_i \sqrt{\mathbf{P}_{(i)}^2 + m_{0(i)}^2 c^2} \right)^2 \geq \left(\sum_i \mathbf{P}_{(i)} \right)^2 + \left(\sum_i m_{0(i)} \right)^2 c^2,$$

risulta la disuguaglianza

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{P}^2 \geq \left(\sum_i m_{0(i)} \right)^2 c^2.$$

Se pertanto si assegna un valore $\mathbf{U} = \frac{\mathbf{P}}{E} c^2$ alla *velocità del centro di massa* del sistema e un valore

$$M_0 = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{P}^2} = \frac{E}{c^2} \sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}$$

alla *massa propria* del sistema, risulta $M_0 \geq \sum_i m_{0(i)}$.

La richiesta di definire velocità e massa propria di un sistema di particelle mantenendo una totale analogia con quanto fatto per una singola particella ci forza ad assumere che la massa propria di un sistema è in generale maggiore della somma delle masse proprie delle sue parti, e la differenza $M_0 - \sum_i m_{0(i)}$, che è l'*energia cinetica interna* del sistema, contribuisce direttamente alla massa inerziale dello stesso.

Passiamo ora a considerare il caso di una collisione completamente inelastica di due particelle (o di due sistemi). Per semplicità consideriamo particelle identiche di massa propria m_0 dotate di velocità uguali e opposte $\mathbf{u}_A = -\mathbf{u}_B$ nel riferimento SR in cui, collidendo, finiscono per trovarsi in quiete con massa propria totale M_0 , sul cui valore per ora non facciamo ipotesi.

Nel riferimento SR', che si muove con velocità $\mathbf{v} = \mathbf{u}_A$ rispetto a SR, le velocità delle particelle prima dell'urto si ottengono tramite le trasformazioni (collineari) di Lorentz delle precedenti:

$$\mathbf{u}'_A = 0, \quad \mathbf{u}'_B = \frac{\mathbf{u}_B - \mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{u}_B \cdot \mathbf{v}}{c^2}} = -\frac{2\mathbf{v}}{1 + \frac{v^2}{c^2}},$$

mentre la velocità dopo l'urto della particella composta risultante è \mathbf{v} .

Le masse relativistiche delle particelle in SR' sono quindi:

$$m'_A = m_0, \quad m'_B = \gamma(u'_B) m_0 = \frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} m_0, \quad M'_0 = \gamma(v) M_0.$$

Noi vogliamo imporre la conservazione dell'impulso anche in SR', e pertanto deve risultare $m'_B \mathbf{u}'_B = -M'_0 \mathbf{v}$. Questa condizione permette di dedurre immediatamente la relazione $M_0 = 2 m_0 \gamma(v)$.

La massa a riposo della particella composta risultante *non* è uguale alla somma delle masse a riposo delle particelle originarie, ma è maggiore in misura proporzionale all'energia cinetica presente prima della collisione e scomparsa a seguito della collisione stessa: infatti $M_0 = 2 m(v)$.

Vale quindi la *conservazione dell'energia totale*, e questa implica a sua volta la *conservazione della massa relativistica*.

Massa ed energia sono equivalenti: la relazione $E = M c^2$ esprime il fattore di conversione tra le unità di misura dell'energia e le unità di misura della massa inerziale. Se per un qualunque motivo cambia l'energia totale di un sistema, cambia anche la sua massa inerziale secondo la relazione $\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2}$.

Notiamo che la variazione di energia può essere dovuta a *qualsiasi* causa: l'interazione con un campo esterno, l'assorbimento di calore (energia termica), l'emissione di energia sotto forma di radiazione.

Le esperienze classiche dell'equivalenza di massa ed energia sono quella basate sulla misura dei trasferimenti di energia nei nuclei tra l'energia cinetica e l'energia di legame, misurata dal *difetto di massa* rispetto alla somma delle masse dei costituenti. Prototipo ne è l'esperienza di Cockroft e Walton (1932), nella quale si studiava il processo



confrontando la differenza delle somme delle masse a riposo dei nuclei iniziali e finali con la differenza tra l'energia cinetica fornita ai protoni e quella posseduta dai prodotti finali (particelle α).

Un'altra importante verifica delle leggi di trasformazione relativistica di massa ed energia si può effettuare assumendo l'ipotesi di Planck dei quanti di luce (fotoni) interpretati come particelle a massa nulla e considerando la loro diffusione da parte di particelle cariche libere (*effetto Compton*).

La radiazione diffusa in direzioni diverse da quella d'incidenza ha una lunghezza d'onda maggiore di quella della radiazione incidente e dipendente dall'angolo di diffusione.

Consideriamo l'interpretazione del processo come urto elastico di un fotone di energia $\varepsilon = h\nu$ e impulso $p = \frac{h\nu}{c}$ che incide su un elettrone fermo dotato di massa propria m_e . Sia inoltre θ l'angolo di diffusione del fotone rispetto alla direzione di incidenza nel riferimento in cui l'elettrone è fermo.

La conservazione dell'energia impone:

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + m'_e c^2,$$

dove, posta u la velocità finale dell'elettrone, vale $m'_e = \gamma(u)m_e$.

Dalla conservazione dell'impulso consegue invece:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + m'_e u \cos \varphi,$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta - m'_e u \sin \varphi,$$

dove φ è l'angolo di rinculo dell'elettrone.

Si noti che sperimentalmente u e φ sono da considerarsi inosservabili, e pertanto occorre esprimere il risultato finale eliminando queste variabili. Dall'eliminazione di φ tra le ultime due equazioni risulta

$$m_e^2 u^2 = \left(\frac{h}{c}\right)^2 (\nu^2 - 2\nu\nu' \cos \theta + \nu'^2),$$

mentre la conservazione dell'energia comporta

$$m_e^2 c^2 = \left(\frac{h}{c}(\nu - \nu') + m_e c\right)^2.$$

Introducendo le variabili $\lambda = \frac{c}{\nu}$ e $\lambda' = \frac{c}{\nu'}$ e risolvendo il sistema con l'eliminazione di u si ottiene la relazione

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta),$$

dove la quantità $\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2.426 \cdot 10^{-10} m$ viene detta *lunghezza d'onda Compton* dell'elettrone. Questa dipendenza di $\Delta\lambda$ dall'angolo θ è esattamente quella esibita dai risultati sperimentali.

Si noti che anche fenomeni quali l'aberrazione della luce e l'effetto Doppler sono spiegati perfettamente dal modello fotonico.

11. Cinematica dei decadimenti e della diffusione

La cinematica e la dinamica relativistica trovano applicazione in particolare nel contesto dei processi che riguardano le particelle elementari, che a differenza della materia macroscopica si trovano abbastanza comunemente dotate di velocità e di energie relativistiche, sia in natura (raggi cosmici, fenomeni di interesse astrofisico e cosmologico) che negli esperimenti di fisica delle alte energie.

In questi ambiti è ormai consuetudinario adottare sistemi di unità di misura nei quali $c = 1$, semplificando così un grande numero di espressioni nelle quali la dipendenza da c , se necessario, può poi essere facilmente ripristinata sulla base dell'analisi dimensionale. Adotteremo quindi anche noi in questo capitolo la convenzione $c = 1$.

I più importanti processi elementari sono i *decadimenti* e la *diffusione*.

Quando particelle instabili decadono, in quiete o in moto, la dinamica del processo può essere interpretata sulla base delle leggi di conservazione (relativistiche) dell'impulso e dell'energia.

Il caso più semplice è quello del decadimento *a due corpi*, per il quale si possono citare come esempi importanti i processi

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu),$$

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma,$$

$$K^\pm \rightarrow \pi^\pm + \pi^0,$$

oltre a numerosi decadimenti (elettromagnetici e deboli) degli adroni pesanti.

In generale siano M , m_1 ed m_2 le masse a riposo della particella che decade e dei prodotti di decadimento. Nel riferimento di quiete di M le particelle 1 e 2 per la conservazione dell'impulso sono emesse con impulsi uguali e opposti:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0,$$

mentre per la conservazione dell'energia deve valere

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = M,$$

e pertanto deve essere necessariamente $M \geq m_1 + m_2$, e devono valere inoltre le relazioni

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_1^2}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_2^2}.$$

È facile risolvere il sistema di queste equazioni ottenendo:

$$\varepsilon_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad \varepsilon_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M}.$$

Una semplice dimostrazione basata sull'uso dei quadri-vettori è la seguente:

$$p_A^\mu = P^\mu - p_B^\mu \Rightarrow p_A^2 = P^2 + p_B^2 - 2P \cdot p_B \Rightarrow 2P \cdot p_B = (M^2 + m_B^2 - m_A^2),$$

dove $A \neq B = 1, 2$, e nel riferimento di quiete vale $P \cdot p_B = M\varepsilon_B$.

Il modulo dell'impulso finale nel riferimento di quiete soddisfa:

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = \frac{M}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{m_1 + m_2}{M}\right) \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{M}\right) \left(1 + \frac{m_1 + m_2}{M}\right) \left(1 + \frac{m_1 - m_2}{M}\right)}.$$

Sono interessanti alcuni casi particolari:

1) $m_1 = m_2 = 0$

In questo caso $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = |\mathbf{p}| = \frac{M}{2}$

Questa è ad esempio la cinematica dei decadimenti in due fotoni.

2) $m_2 = 0$

In questo caso $\varepsilon_1 = \frac{M^2 + m_1^2}{2M}$, $\varepsilon_2 = |\mathbf{p}| = \frac{M^2 - m_1^2}{2M}$

Questa è la cinematica dei decadimenti elettromagnetici con emissione di un fotone e dei decadimenti deboli con emissione di un neutrino.

3) $m_1 = m_2$

In questo caso $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{M}{2}$ e $|\mathbf{p}| = \frac{M}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}$, da cui anche l'espressione della velocità finale $|\mathbf{v}| = \frac{|\mathbf{p}|}{\varepsilon} = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}$.

Nel cosiddetto *riferimento del laboratorio* la particella che decade si muove con velocità \mathbf{V} . Le energie dei prodotti di decadimento sono legate ai loro valori nel riferimento di quiete da una trasformazione di Lorentz:

$$\varepsilon_{A\ell} = \gamma(\varepsilon_A + V p_A \cos \theta_c),$$

$$\gamma(\varepsilon_A - V p_A) \leq \varepsilon_{A\ell} \leq \gamma(\varepsilon_A + V p_A),$$

dove θ_c è l'angolo che la direzione di emissione forma con \mathbf{V} nel *riferimento del centro di massa* (riferimento di quiete di M).

Supponiamo che la *distribuzione* dei prodotti di decadimento risulti *uniforme e isotropa* nel riferimento del centro di massa, per cui vale

$$dN_c = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} d \cos \theta_c.$$

Differenziando l'equazione di trasformazione si ottiene allora nel riferimento del laboratorio

$$dN_\ell = \frac{1}{2\gamma V p_A} d\varepsilon_{A\ell},$$

ovvero la distribuzione è *uniforme in energia* nel riferimento del laboratorio.

La discussione dei processi di decadimento a tre corpi è necessariamente più complessa, ma si semplifica sensibilmente quando si adottano come variabili dinamiche quantità definite nel riferimento del centro di massa, in particolare le energie ε_A dei prodotti di decadimento. È possibile rappresentare queste variabili in modo invariante, sfruttando la legge di conservazione del quadrimpulso $P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu + p_3^\mu$ e le proprietà del centro di massa: valgono infatti le relazioni $P \cdot p_A = M \varepsilon_A$.

Il numero delle variabili dinamiche indipendenti è però soltanto due, in virtù della relazione di conservazione dell'energia $\sum_A \varepsilon_A = M$.

Passiamo alla discussione dei processi di diffusione, considerando in particolare i processi in cui lo stato finale è costituito da due corpi, non necessariamente identici a quelli presenti nello stato iniziale.

Le relazioni dinamiche che devono essere soddisfatte sono le leggi di conservazione:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu$$

e i vincoli relativi alle masse:

$$p_A \cdot p_A = m_A^2, \quad p'_A \cdot p'_A = m_A'^2.$$

Conviene ancora una volta introdurre il riferimento del centro di massa, in moto rispetto al laboratorio con velocità

$$\mathbf{V}_c = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2}{\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2}.$$

La quantità invariante di Lorentz

$$E_c \equiv \sqrt{(p_1 + p_2)^2} = \sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2}$$

è l'energia del centro di massa.

E_c rappresenta la “massa propria” dello stato intermedio (virtuale) che si viene a creare nel processo di collisione. Lo stato finale si può quindi pensare come prodotto del decadimento di questo stato intermedio, nel riferimento in cui esso viaggia con velocità \mathbf{V}_c . In perfetta analogia con la discussione precedente abbiamo i seguenti risultati per le grandezze misurate nel riferimento del centro di massa:

$$\varepsilon_{Ac} = \frac{(p_1 + p_2) \cdot p_A}{E_c}, \quad |\mathbf{p}_{Ac}| = \sqrt{\frac{[(p_1 + p_2) \cdot p_A]^2}{E_c^2} - m_A^2},$$

da cui esplicitando si ottiene, per $A \neq B = 1, 2$,

$$\varepsilon_{Ac} = \frac{E_c^2 + m_A^2 - m_B^2}{2E_c}, \quad |\mathbf{p}_{Ac}| = \frac{E_c}{2} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{m_A + m_B}{E_c}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{m_A - m_B}{E_c}\right)^2\right]},$$

e valgono anche tutte le corrispondenti espressioni per le quantità relative alle particelle presenti nello stato finale.

Le variabili dinamiche nei processi di collisione possono essere parametrizzate in modo invariante anche mediante le *variabili di Mandelstam*:

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2 = E_c^2,$$

$$t \equiv (p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2,$$

$$u \equiv (p_1 - p'_2)^2 = (p_2 - p'_1)^2,$$

legate tra loro dalla relazione $s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_1'^2 + m_2'^2$.

È utile anche introdurre il *riferimento del laboratorio*, nel quale una delle particelle iniziali (ad esempio la particella 2) è ferma. Sempre facendo uso degli invarianti è possibile dedurre le seguenti relazioni:

$$\varepsilon_{1\ell} = \frac{p_1 \cdot p_2}{m_2} = \frac{m_1}{\sqrt{1 - v_{rel}^2}}, \quad p_{1\ell} \equiv |\mathbf{p}_{1\ell}| = \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{m_2},$$

dove vale:

$$v_{rel} = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{(p_1 \cdot p_2)^2}} = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2)^2}}{1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}.$$

Si possono anche stabilire relazioni tra laboratorio e centro di massa:

$$E_c = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2\varepsilon_{1\ell} m_2},$$

$$V_c = \frac{p_{1\ell}}{\varepsilon_{1\ell} + m_2}, \quad \gamma(V_c) = \frac{\varepsilon_{1\ell} + m_2}{E_c},$$

$$\varepsilon_{Ac} = \frac{m_1^2 + m_2 \varepsilon_{1\ell}}{E_c}, \quad |\mathbf{p}_{Ac}| = \frac{m_2 p_{1\ell}}{E_c}.$$

Un caso particolarmente interessante è quello della diffusione elastica, per cui vale $m'_1 = m_1$ e $m'_2 = m_2$. In tal caso il processo di diffusione nel riferimento del centro di massa consiste semplicemente in un cambio di direzione degli impulsi, che restano uguali in modulo e opposti in verso.

Usando le equazioni invarianti (valide per i processi elastici)

$$m_1^2 + p_1 \cdot p_2 = p_1 \cdot p'_1 + p_2 \cdot p'_1, \quad m_2^2 + p_1 \cdot p_2 = p_2 \cdot p'_2 + p_1 \cdot p'_2,$$

si ottengono le energie e gli impulsi finali nel riferimento del laboratorio:

$$\varepsilon'_{2\ell} = \frac{(\varepsilon_{1\ell} + m_2)^2 + p_{1\ell}^2 \cos^2 \theta_{2\ell}}{(\varepsilon_{1\ell} + m_2)^2 - p_{1\ell}^2 \cos^2 \theta_{2\ell}} m_2, \quad p'_{2\ell} = \frac{2(\varepsilon_{1\ell} + m_2) p_{1\ell} \cos \theta_{2\ell}}{(\varepsilon_{1\ell} + m_2)^2 - p_{1\ell}^2 \cos^2 \theta_{2\ell}} m_2.$$

In modo analogo si ottiene anche:

$$\varepsilon'_{1\ell} = \frac{(\varepsilon_{1\ell} + m_2)(\varepsilon_{1\ell} m_2 + m_1^2) \pm p_{1\ell}^2 \cos \theta_{1\ell} \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta_{1\ell}}}{(\varepsilon_{1\ell} + m_2)^2 - p_{1\ell}^2 \cos^2 \theta_{1\ell}},$$

$$p'_{1\ell} = \frac{p_{1\ell} \cos \theta_{1\ell} (\varepsilon_{1\ell} m_2 + m_1^2) \pm p_{1\ell} (\varepsilon_{1\ell} + m_2) \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta_{1\ell}}}{(\varepsilon_{1\ell} + m_2)^2 - p_{1\ell}^2 \cos^2 \theta_{1\ell}},$$

dove vale la condizione $\sin \theta_{1\ell} \leq \frac{m_2}{m_1}$.

Volendo invece esaminare il caso del più generale *processo d'urto*, notiamo prima di tutto che la descrizione cinematica delle due particelle in collisione, sia nel riferimento del centro di massa che in quello del laboratorio, ripete la discussione del caso fin qui esaminato. Viceversa il numero dei gradi di libertà dello stato finale dipende dal numero n delle particelle prodotte, e se teniamo conto delle relazioni tra energia e impulso delle singole particelle e delle leggi di conservazione di energia e impulso i gradi di libertà complessivi risulteranno essere $3n - 4$.

Tuttavia il numero dei parametri necessari a descrivere la dinamica è ridotto ulteriormente dall'invarianza del sistema per rotazioni intorno all'asse di collisione, per cui in pratica, una volta fissata l'energia totale iniziale, quando le particelle prodotte sono soltanto due basterà specificare un angolo di diffusione.

Nel caso di processi non elastici un parametro dinamico molto importante è la *soglia di reazione*:

$$\Delta M \equiv \sum_{i=1}^n m_{(i)} - (m_1 + m_2),$$

dove $m_{(i)}$ sono le masse delle n particelle finali.

Se $\Delta M > 0$ la reazione non avverrà fintanto che non ci sarà sufficiente energia cinetica a disposizione. La condizione perché ciò accada è semplicemente

$$\varepsilon_c \geq \varepsilon_c^{(th)} \equiv m_1 + m_2 + \Delta M,$$

dove $\varepsilon_c^{(th)}$ è detta *energia di soglia*.

Nel riferimento del laboratorio questa condizione si traduce nella relazione

$$\varepsilon_{1\ell}^{(th)} - m_1 = \Delta M \left(1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{\Delta M}{2m_2} \right),$$

dove soltanto l'ultimo termine è puramente relativistico.

Per concludere consideriamo il caso più generale di due corpi soggetti a mutua interazione. In meccanica classica la conservazione dell'impulso discendeva in questo caso dal principio di azione e reazione. In meccanica relativistica però tutti i segnali hanno velocità di propagazione finita, e pertanto l'affermazione che due corpi risentono di forze uguali e contrarie non può essere vera in tutti i sistemi di riferimento, per la relatività della simultaneità, ad eccezione del caso di *forze di contatto* (urti).

L'unico modo corretto di uscire da questo problema consiste nell'ammettere che tutte le interazioni a distanza tra particelle siano mediate da campi che si propagano con velocità finita, cosicché l'interazione tra particelle e campo è *locale* e quindi avviene istantaneamente in tutti i sistemi di riferimento. Così pure sono fenomeni locali le interazioni del campo con se stesso che ne producono la propagazione (onde).

Se ai campi associamo impulso ed energia (o meglio densità locali di impulso ed energia) siamo in grado di soddisfare le relative leggi di conservazione generalizzando tutti i risultati precedenti.

Bibliografia

- L.D.Landau, E.M.Lifshitz, *Teoria dei Campi*, Editori Riuniti, 1982
Essenziale, profondo ed euristico, utilizza spesso metodi originali che si apprezzano più facilmente quando si ha già un certo grado di conoscenza della materia.
- W.K.H.Panofsky, M.Phillips, *Elettricità e Magnetismo*, Ambrosiana, 1966
Interessante per l'*excursus* sulle teorie alternative alla relatività e anche per la formulazione relativistica dell'elettromagnetismo.
- W.Rindler, *La Relatività Ristretta*, Cremonese, 1971
Manuale agile e sintetico, ma ricco di spunti e di applicazioni. Presenta anche la dinamica dei mezzi continui.
- C.Møller, *The Theory of Relativity*, Oxford University Press, 1952
Classico trattato, che approfondisce ogni tematica curando gli aspetti formali.
- W.Pauli, *Theory of Relativity*, Pergamon Press, 1958
Preziosa introduzione (scritta all'età di 21 anni!) che spazia su tutti i temi con grande competenza e profondità.
- W.G.V.Rosser, *An Introduction to the Theory of Relativity*, Butterworths, 1964
Pregevoli soprattutto l'analisi dettagliata di numerosi esperimenti cruciali e il ricco repertorio di problemi.
- R.Hagedorn, *Relativistic Kinematics*, Benjamin, 1964
Discute soprattutto gli aspetti della teoria più direttamente rilevanti per la fisica delle alte energie.
- E.F.Taylor, J.A.Wheeler, *Spacetime Physics*, Freeman, 1966
Fantasioso e brillante, è un'utile introduzione anche alla relatività generale.
- R.Resnick, *Introduction to Special Relativity*, Wiley, 1968
Offre un'esposizione piana e completa dei fondamenti della teoria.
- J.B.Kogut, *Introduction to Relativity*, Harcourt, 2001
Utile per una prima introduzione, grazie alla semplicità dell'esposizione.
- V.Barone, *Relatività*, Bollati Boringhieri, 2004
Ampio e accurato manuale, contiene interessanti complementi e problemi, e offre inoltre un'introduzione alle applicazioni più moderne e avanzate.