FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2003/2004
Primo appello - Sessione invernale
Giovedì 15 Gennaio 2004 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

Occorre innanzitutto calcolare la frequenza che il fotone emesso avrà nel riferimento del laboratorio. Dalla relazione valida per l'effetto Doppler longitudinale (o dalla trasformazione di Lorentz del vettore d'onda) si ricava

$$\nu = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\nu_0.$$

Nel processo di emissione si conservano l'energia e la quantità di moto. Valgono quindi per le quantità E_1 e P_1 relative alla particella dopo l'emissione del fotone le relazioni

$$E_1 + h\nu = E_0 \equiv \gamma(v) m\, c^2,$$

$$P_1 + h\frac{\nu}{c} = P_0 \equiv \gamma(v) m\, v,$$

dove v e ν sono quantità note.

Siamo quindi in grado di calcolare anche la massa a riposo della particella dopo l'emissione:

$$m_1^2 c^4 = E_1^2 - P_1^2 c^2 = m^2 c^4 - 2h\nu(E_0 - P_0 c) = (mc^2 - 2h\nu_0) mc^2,$$

come peraltro si sarebbe ottenuto immediatamente dalla relazione invariante $P_1^\mu P_{1\mu} = P_0^\mu P_{0\mu} - 2hP_0^\mu k_\mu$ calcolata nel riferimento di quiete della sorgente.

La riflessione restituisce il fotone con la stessa energia ma quantità di moto cambiata di segno, per cui applicando al processo di assorbimento le leggi di conservazione si ottiene:

$$E_2 = E_1 + h\nu = E_0,$$

$$P_2 = P_1 - h\frac{\nu}{c} = P_0 - 2h\frac{\nu}{c}.$$

Notiamo che, come è naturale in un processo di interazione con un corpo (specchio) di massa infinita, l'energia finale coincide con quella iniziale, mentre la quantità di moto cambia.

La velocità finale della particella è data dalla relazione

$$v_2 = \frac{P_2 c^2}{E_2} = v - \frac{2h\nu}{E_0} c$$

esprimibile anche nella forma

$$v_2 + c = (1 - \frac{2h\nu_0}{mc^2})(v + c).$$

La massa finale a riposo della particella è

$$m_2^2 c^4 = E_2^2 - P_2^2 c^2 = (mc^2 - 2h\nu_0)(mc^2 + 2h\nu_0 \frac{c+v}{c-v}).$$

Problema R.2

Poiché il campo elettrico uniforme produce un'accelerazione costante $a_0 \equiv \frac{eE}{m}$ nel riferimento di quiete istantanea dell'elettrone, il moto risultante è di tipo iperbolico. Per le condizioni a contorno date la legge oraria del moto dell'elettrone che ne risulta ha quindi la forma:

$$x(t) = \frac{c^2}{a_0}\Big[\sqrt{1 + (\frac{a_0 T}{2c})^2} - \sqrt{1 + (\frac{a_0 t}{c})^2}\Big].$$

A questa legge oraria corrisponde una velocità istantanea

$$v(t) = -\frac{a_0 t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2}},$$

che a sua volta implica

$$\gamma(t) = \sqrt{1 + (\frac{a_0 t}{c})^2}.$$

A questo punto si può facilmente calcolare la relazione che intercorre tra tempo proprio e tempo del riferimento; dall'integrazione indefinita risulta che, posto $\tau(0) = 0$,

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{dt}{\gamma(t)} = \frac{c}{a_0} \sinh^{-1} \frac{a_0 t}{c}.$$

Per il tempo proprio totale dell'elettrone $\tau_0 = \tau(\frac{T}{2}) - \tau(-\frac{T}{2})$ vale quindi la relazione

$$\frac{a_0 T}{2\,c} = \sinh \frac{a_0 \tau_0}{2\,c}.$$

Notiamo che dalla definizione della rapidità risulta immediatamente nel caso in esame

$$\frac{a_0 t}{c} = \sinh \theta.$$

Dal confronto delle relazioni precedentemente derivate consegue subito che $\theta = \frac{a_0 \tau}{c}$ e di conseguenza

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{a_0}{c} \equiv \frac{eE}{mc}.$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere dal calcolo diretto notando che

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma^3 \frac{1}{c}\frac{dv}{dt} = \gamma^3 \frac{a}{c} = \frac{a_0}{c}.$$

Poiché le masse sono fissate, ogni particella finale è caratterizzata da $d-1$ parametri, che possono essere identificati con le componenti dell'impulso spaziale.

Esistono tuttavia d vincoli, che derivano dalle leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia.

Esistono inoltre, per $1 \leq d-1 \leq n$, tutte le simmetrie derivanti dalla possibilità di effettuare rotazioni spaziali globali del sistema senza modificare il moto relativo dei prodotti di decadimento. IL numero di tali simmetrie è $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$, e pertanto risulta nelle ipotesi esposte

$$G = n(d-1) - d - \frac{1}{2}(d-1)(d-2) = (n - \frac{d}{2})(d-1) - 1.$$

Questo risultato può essere riscritto nella forma

$$G = \frac{1}{2}(n - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}(n + \frac{1}{2} - d)^2 - 1,$$

in cui si è messo in evidenza il fatto che G è una funzione pari di $n + \frac{1}{2} - d$.

Di conseguenza il massimo valore possibile di G al variare di d si ha in corrispondenza del minimo valore possibile di $|n + \frac{1}{2} - d|$, che sotto l'ipotesi che n e d siano interi è necessariamente $\frac{1}{2}$.

Pertanto il massimo valore di G è

$$G_M = \frac{1}{2}(n - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{8} - 1 = \frac{1}{2}(n+1)(n-2)$$

e si ottiene in corrispondenza delle dimensioni $d = n$ e $d = n+1$.

Notiamo poi che $d - 1 = n$ è anche la massima dimensione spaziale del sottospazio generato da n vettori spaziali, e pertanto quando $d > n+1$ le trasformazioni di simmetria che non operano nel sottospazio lasciano il sistema inalterato. Pertanto in questo caso il conteggio dei gradi di libertà va effettuato nel sottospazio e il risultato di conseguenza coincide con G_M.

Quest'analisi è consistente con il conteggio effettuato valutando il numero di quantità invarianti per rotazioni (moduli e prodotti scalari) che si possono ottenere da $n-1$ vettori indipendenti, e tenendo conto del fatto che la legge di conservazione dell'energia comporta un ulteriore vincolo.

Può essere interessante anche notare che per $d = n-1$ vale sempre $G = G_M - 1$: il processo con allineamento ha sempre un grado di libertà in meno rispetto a quello massimo e quindi definisce la frontiera del dominio cinematico.

Problema A.1

Gli integrali primi del moto sono l'energia E e il momento angolare L, in quanto il potenziale è di tipo centrale. L'energia in particolare vale

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}, \qquad\qquad U_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^{3/2}}.$$

La traiettoria circolare ha un raggio r_0 determinato dalla condizione di minimo su U_{eff}, che si scrive

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = \frac{3}{2}\frac{\alpha}{r^{5/2}} - \frac{L^2}{mr^3} = 0.$$

Risulta pertanto

$$r_0 = \left(\frac{2}{3}\frac{L^2}{\alpha m}\right)^2.$$

La frequenza delle piccole oscillazioni si trova sostituendo $r \to r_0 + \eta$ in U_{eff} e sviluppando in serie di potenze di η fino al secondo ordine. Si ottiene allora

$$U(r_0 + \eta) \approx U(r_0) + \frac{1}{4}\frac{L^2}{mr_0^4}\eta^2,$$

da cui utilizzando l'espressione di r_0 e le usuali relazioni che legano la frequenza agli altri parametri dinamici si ottiene per le piccole oscillazioni intorno a r_0

$$\omega = \left(\frac{3}{2}\alpha\right)^4 \frac{m^3}{\sqrt{2}L^7}.$$

Le equazioni del moto hanno la forma

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha}{r^{5/2}}$$

e pertanto sono invarianti sotto la trasformazione

$$\mathbf{r} \to k\,\mathbf{r}, \qquad\qquad t \to k^{7/4}\,t,$$

in quanto tale trasformazione implica anche, per la definizione di L, la trasformazione $L \to k^{1/4}\,L$, e sostituendo nell'espressione dell'energia si ottiene per consistenza $E \to k^{-3/2}\,E$.

Sostituendo questi risultati nell'espressione di r_0 si trova poi facilmente la legge di trasformazione $r_0 \to k\,r_0$, che è consistente con la trasformazione postulata.

Più in generale, se $\mathbf{r}(t)$, $\theta(t)$ è una soluzione delle equazioni del moto, allora anche $k\,\mathbf{r}(k^{7/4}t)$, $\theta(k^{7/4}t)$ è una soluzione delle stesse equazioni.

Problema A.2

La funzione generatrice che si può scrivere più facilmente nel caso di trasformazioni puntuali è

$$F_2(q_i,\, P_i,\, t) = Q_1(q_i, t)P_1 + Q_2(q_i, t)P_2,$$

per la quale è immediato verificare che vale

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}.$$

A questo punto è immediato ottenere le relazioni $p_i = \sum_j f_{ij} P_j$ (dove $f_{ij} \equiv \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$) che legano i vecchi momenti ai nuovi momenti e alle vecchie coordinate:

$$p_1 = \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}P_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}P_2,$$

$$p_2 = \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}P_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}P_2.$$

Queste relazioni sono lineari nei momenti, e quindi sono facilmente invertibili; si ottiene subito $P_j = \sum_k f^{-1}_{jk} p_k$, ovvero specificamente

$$P_1 = \frac{1}{\Delta}\Big(\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}p_1 - \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}p_2\Big),$$

$$P_2 = \frac{1}{\Delta}\Big(-\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}p_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}p_2\Big),$$

dove si è posto per comodità di notazione $\Delta \equiv \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}$.

A questo punto siamo in grado di calcolare esplicitamente le parentesi fondamentali per sostituzione diretta. Vale innanzitutto

$$\{Q_i,\, P_j\}_{q,p} \equiv \sum_k \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} = \sum_k \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k},$$

in quanto le Q_i non dipendono dalle p_k.

Si può a questo punto considerare separatamente i singoli casi:

$$\{Q_1,\, P_1\}_{q,p} = \frac{1}{\Delta}\Big(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\Big) = 1,$$

$$\{Q_2,\, P_2\}_{q,p} = \frac{1}{\Delta}\Big(-\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\Big) = 1,$$

$$\{Q_1,\, P_2\}_{q,p} = \frac{1}{\Delta}\Big(-\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\Big) = 0,$$

$$\{Q_2,\, P_1\}_{q,p} = \frac{1}{\Delta}\Big(\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\Big) = 0,$$

oppure più semplicemente notare che vale

$$\{Q_i,\, P_j\}_{q,p} = \sum_k f_{ki} f^{-1}_{jk} = \delta_{ij}.$$

Problema A.3

La Lagrangiana del sistema si può scrivere adottando come coordinata generalizzata l'angolo θ. Risulta allora, tenendo conto dei contributi all'energia potenziale dovuti rispettivamente alla gravità e alla forza di richiamo elastica

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta - \frac{1}{2}Kl\theta^2.$$

La condizione di equilibrio si ricava in questo caso imponendo $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, ovvero

$$(mg\sin\theta - K\theta)\,l = 0.$$

Quest'equazione ammette soltanto la soluzione $\theta = 0$ finché vale la relazione $mg \leq K$. Quando questa condizione è soddisfatta $\theta = 0$ è una posizione di equilibrio stabile.

Viceversa se $mg > K$ allora $\theta = 0$ diventa una posizione di equilibrio instabile, e la posizione di equilibrio stabile $\theta_0 \neq 0$ si determina risolvendo l'equazione

$$\frac{\sin\theta_0}{\theta_0} = \frac{K}{mg}$$

e scegliendo (nel caso di più soluzioni) il più piccolo valore non banale di $\theta = 0$.

Nel primo caso l'equazione per le piccole oscillazioni si ricava sviluppando le equazioni del moto al primo ordine non banale in θ, e ottenendo quindi

$$ml^2\ddot{\theta} \approx -(K - mg)\,l\theta.$$

Risulta quindi in tal caso

$$\omega = \sqrt{\frac{K - mg}{m\,l}},$$

che evidentemente vale solo nell'ipotesi $K \geq mg$.

Nel secondo caso bisogna sviluppare le equazioni intorno al punto di equilibrio, ponendo $\theta = \theta_0 + \eta$ e ottenendo al primo ordine non banale

$$ml^2\ddot{\eta} \approx (mg\cos\theta_0 - K)\,l\eta.$$

Di conseguenza la frequenza delle piccole oscillazioni è

$$\omega = \sqrt{\frac{K - mg\cos\theta_0}{m\,l}}.$$

Sfruttando la disuguaglianza $\tan\theta \geq \theta$ è facile dimostrare che l'argomento della radice è sempre positivo nel regime in cui è definito θ_0.