FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2004/2005
Primo appello - Sessione invernale
Mercoledì 19 Gennaio 2005 - ore 15

SOLUZIONI

Problema R.1

Valgono in generale le relazioni

$$\mathbf{k} + \mathbf{p} = \mathbf{k}' + \mathbf{p}', \qquad \epsilon + E = \epsilon' + E'.$$

Ma notiamo che per ipotesi in questo riferimento (sistema di Breit o "brick wall") vale

$$k^\mu = (\epsilon, \mathbf{k}), \qquad k'^\mu = (\epsilon, -\mathbf{k}),$$

in quanto $k^\mu k_\mu = k'^\mu k'_\mu = m^2$, e pertanto le energie iniziali e finali della particella di massa m devono essere uguali.

Ma allora dalla legge di conservazione dell'energia consegue subito che vale anche $E' = E$, e quindi

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}), \qquad p'^\mu = (E, \mathbf{p}'),$$

ma dalla relazione $p^\mu p_\mu = p'^\mu p'_\mu = M^2$ consegue allora

$$|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}| = \sqrt{E^2 - M^2}.$$

Notando poi che vale $\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{p}' - \mathbf{p} = 2\,\mathbf{k}$ si riconosce che questo processo in questo riferimento equivale alla riflessione di entrambe le particelle da parte di un muro di massa infinita. Notiamo in particolare che dalla relazione $(\mathbf{p}' + \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = 0$ risulta che $\mathbf{p}' + \mathbf{p}$ è ortogonale a $\mathbf{k}$ e quindi parallelo al "muro".

Usando ϵ ed E, definite in questo riferimento, come variabili indipendenti si possono calcolare gli invarianti relativistici. Vale infatti

$$k^\mu + k'^\mu = (2\,\epsilon, 0), \qquad k^\mu - k'^\mu = (0, 2\,\mathbf{k}),$$

e pertanto $2\,m^2 + 2k \cdot k' = 4\,\epsilon^2$, mentre vale $t = 2m^2 - 2k \cdot k' = -4\,|\mathbf{k}|^2$, da cui si ricava la prima relazione cercata

$$t = -4\,|\mathbf{k}|^2 = 4\,m^2 - 4\epsilon^2.$$

Vale poi $p^\mu \cdot (k^\mu + k'^\mu) = 2\,E\,\epsilon$ da cui la possibilità di esprimere E in termini degli invarianti. Ancor più semplicemente, si noti che dalla cinematica risulta $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + 2\,\mathbf{k}$ da cui prendendo il modulo quadro si ottiene $\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{k}^2 = 0$.

Pertanto vale

$$s = M^2 + m^2 + 2\,E\,\epsilon - 2\,\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = M^2 + m^2 + 2\,E\,\epsilon + 2\mathbf{k}^2 = M^2 + m^2 + 2\,E\,\epsilon - \frac{t}{2},$$

da cui subito segue la relazione desiderata

$$s = 2\,E\,\epsilon + 2\epsilon^2 + M^2 - m^2.$$

Queste relazioni si possono anche invertire per ottenere ϵ ed E in funzione di s e t.

Problema R.2

L'effetto Doppler da sorgente in movimento è in questo caso puramente quello dovuto alla dilatazione dei tempi nei riferimenti in movimento, in quanto la distanza dalla Terra della sorgente non cambia. Il calcolo si può fare anche considerando l'emissione dal riferimento di quiete istantanea del satellite, e ricordando però che in questo caso la direzione di propagazione dell'onda deve formare un angolo tale che $\cos\theta = v_0/c$ per tener conto dell'aberrazione se si vuole che il segnale arrivi a Terra.

Comunque si effettui il calcolo (vedi Esercizio C.2.1) risulta semplicemente $\nu_D = \frac{\nu_0}{\gamma(v_0)}$ dove ν_0 è la frequenza di emissione nel riferimento di quiete della sorgente, mentre v_0 indica la velocità del moto su un'orbita geostazionaria e si ricava dalla combinazione delle relazioni dinamiche e cinematiche

$$\frac{v_0^2}{r_0} = \frac{GM}{r_0^2}, \qquad\qquad v_0 = \frac{2\pi r_0}{T},$$

essendo T la durata del giorno.

Risolvendo si ottiene

$$r_0 = \Big(\frac{GM\,T^2}{4\,\pi^2}\Big)^{\frac{1}{3}}, \qquad\qquad v_0 = \Big(\frac{2\,\pi}{T}GM\Big)^{\frac{1}{3}}$$

e numericamente $r_0 \approx 42.200$ Km e $v_0 \approx 3,07$ Km/sec.

Si può qundi stimare con buona approssimazione la variazione di frequenza scrivendo

$$\nu_D \approx \nu\big(1 - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{c^2}\big) = \nu\big(1 - \frac{1}{2}\frac{GM}{r_0\,c^2}\big).$$

Utilizzando le formule dell'energia potenziale newtoniana adattate al problema in questione possiamo scrivere la conservazione dell'energia per un fotone in campo gravitazionale nella forma

$$E = h\,\nu_0\big(1 - \frac{GM}{r_0\,c^2}\big) = h\,\nu_G\big(1 - \frac{GM}{r_T\,c^2},\big),$$

dove il raggio terrestre r_T è molto minore di r_0.

Si può qundi stimare con buona approssimazione la variazione di frequenza scrivendo

$$\nu_G \approx \nu_0\big(1 + \frac{GM}{r_T\,c^2} - \frac{GM}{r_0\,c^2}\big).$$

Notiamo che la frequenza diminuisce per effetto Doppler mentre aumenta per effetto di "caduta". Chiaramente l'effetto numericamente dominante è quello gravitazionale in quanto appunto $r_T << r_0$.

Numericamente vale $\frac{GM}{r_T\,c^2} \approx 6,9 \cdot 10^{-10}$ e l'effetto Doppler è circa il 9% di quello gravitazionale.

Problema R.3

Notiamo che per la definizione di quadriaccelerazione deve valere $a^\mu U_\mu = 0$, essendo $U^\mu U_\mu = c^2$.

L'unica soluzione in due dimensioni per l'ortogonalità di due vettori è

$$a^\mu = a\,\varepsilon^{\mu\nu} U_\nu,$$

come si doveva dimostrare.

Possiamo quindi calcolare

$$a^\mu a_\mu = a^2 \varepsilon^{\mu\nu} U_\nu \varepsilon_{\mu\rho} U^\rho,$$

e notando che in due dimensioni vale anche $\varepsilon^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\rho} = -\delta^\nu_\rho$ si ricava immediatamente

$$a^\mu a_\mu = -a^2 U^\mu U_\mu = -a^2 c^2.$$

Poiché sappiamo che in generale $a^\mu a_\mu = -a_0^2$ risulta subito $a_0 \equiv a\,c$.

Problema A.1

La Lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2} K (X - x_1 - l_0)^2 - \frac{1}{2} K (X - x_2 + l_0)^2.$$

Il sistema è all'equilibrio per $X = 0$, $x_1 = -l_0$, $x_2 = l_0$.

Si possono quindi utilizzare le nuove coordinate

$$\eta_1 = x_1 + l_0, \qquad \eta_2 = x_2 - l_0,$$

e ottenere la Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) - \frac{1}{2} K (X - \eta_1)^2 - \frac{1}{2} K (X - \eta_2)^2.$$

La condizione di piccole oscillazioni corrisponde all'annullarsi del determinante della matrice $\omega^2 T_{ij} - V_{ij}$, ovvero all'equazione

$$(K - m\omega^2)^2 (2K - M\omega^2) - 2(K - m\omega^2) K^2 = 0,$$

che si riduce a

$$\omega^2 (K - m\omega^2)(\omega^2 m M - K M - 2Km) = 0.$$

Le frequenze proprie sono quindi semplicemente

$$\omega^2 = 0, \qquad \omega^2 = \frac{K}{m}, \qquad \omega^2 = \frac{K}{m} + \frac{2K}{M}.$$

I corrispondenti autovettori si ricavano facilmente e valgono rispettivamente

$$(1,1,1), \qquad (1,0,-1), \qquad (1,-\frac{2m}{M},1).$$

Invertendo la matrice degli autovettori si ottiene la matrice che, applicata alle variabili η, permette di ricavare i modi normali.

All'autovalore $\omega^2 = 0$ corrisponde il modo normale

$$Q_0 = m(\eta_1 + \eta_2) + MX,$$

che è legato alla coordinata del centro di massa del sistema e corrisponde al modo zero legato all'invarianza per traslazioni.

All'autovalore $\omega^2 = \frac{K}{m}$ corrisponde il modo normale

$$Q_- = \eta_1 - \eta_2,$$

mentre all'autovalore $\omega^2 = \frac{K}{m} + \frac{K}{2M}$ corrisponde il modo normale

$$Q_+ = 2X - (\eta_1 + \eta_2).$$

Questi stessi risultati si possono ottenere facilmente anche considerando direttamente le equazioni del moto

$$m\ddot{\eta}_1 = -K(\eta_1 - X),$$

$$m\ddot{\eta}_2 = -K(\eta_2 - X),$$

$$M\ddot{X} = -K(2X - \eta_1 - \eta_2)$$

e prendendo le opportune combinazioni lineari

$$m(\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + M\ddot{X} = 0,$$

$$m(\ddot{\eta}_1 - \ddot{\eta}_2) = -K(\eta_1 - \eta_2),$$

$$(2\ddot{X} - \ddot{\eta}_1 - \ddot{\eta}_2) = -(\frac{2K}{m} + \frac{K}{M})(2X - \eta_1 - \eta_2).$$

Problema A.2

Dal calcolo diretto risulta

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{\sqrt{2mPq^2 + A^2}}{q},$$

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = \frac{\sqrt{2mPq^2 + A^2}}{2P}.$$

Risolvendo algebricamente si ricava

$$Q = \frac{mpq^3}{p^2q^2 - A^2}, \qquad P = \frac{p^2}{2m} - \frac{A^2}{2mq^2}.$$

Le trasformazioni inverse sono quindi:

$$q = \sqrt{\frac{4Q^2P^2 - A^2}{2mP}}, \qquad p = 2PQ\sqrt{\frac{2mP}{4Q^2P^2 - A^2}}.$$

Dai risultati precedenti segue subito che l'Hamiltoniana trasformata è

$$K(P, Q) \equiv H(p(P, Q), q(P, Q)) = P.$$

Di conseguenza le nuove equazioni canoniche sono

$$\dot{Q} = 1, \qquad \dot{P} = 0,$$

e sono risolte banalmente da

$$Q = t - t_0, \qquad P = E,$$

dove E è l'energia conservata.

Per immediata sostituzione si trova la soluzione delle equazioni del moto nella forma

$$q(t) = \sqrt{\frac{4E^2(t-t_0)^2 - A^2}{2mE}}, \qquad p(t) = 2E(t-t_0)\sqrt{\frac{2mE}{4E^2(t-t_0)^2 - A^2}}.$$

Problema A.3

È sufficiente calcolare la derivata rispetto al tempo di $H_0(p, q)$ facendo uso delle equazioni canoniche o delle parentesi di Poisson:

$$\frac{d}{dt}H_0(p, q) = \frac{\partial H_0}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H_0}{\partial p}\dot{p} = \frac{\partial H_0}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H_0}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} = \{H_0, H\}$$

e notando che vale

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H_0}{\partial q}K(t), \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H_0}{\partial p}K(t).$$

Pertanto la derivata rispetto al tempo si annulla e H_0 è una quantità conservata. Ne segue anche banalmente che H non può essere conservata se K non è indipendente dal tempo.