FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2005/2006
Primo appello - Sessione invernale
Venerdì 13 Gennaio 2006 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

Scriviamo le leggi di conservazione di energia e impulso utilizzando le variabili di rapidità e introducendo per comodità una variabile ausiliaria M che rappresenta la massa a riposo totale del sistema:

$$m_1 \cosh\theta_1 + m_2 \cosh\theta_2 = M \cosh\theta_c = m_1 \cosh\theta_1' + m_2 \cosh\theta_2',$$

$$m_1 \sinh\theta_1 + m_2 \sinh\theta_2 = M \sinh\theta_c = m_1 \sinh\theta_1' + m_2 \sinh\theta_2'.$$

Dividendo membro a membro è possibile ottenere immediatamente le relazioni

$$\tanh\theta_c = \frac{m_1 \sinh\theta_1 + m_2 \sinh\theta_2}{m_1 \cosh\theta_1 + m_2 \cosh\theta_2} = \frac{m_1 \sinh\theta_1' + m_2 \sinh\theta_2'}{m_1 \cosh\theta_1' + m_2 \cosh\theta_2'}.$$

Sfruttando l'additività delle rapidità possiamo ricavare immediatamente le espressioni per le rapidità iniziali e finali nel riferimento del centro di massa:

$$\theta_{ic} = \theta_i - \theta_c, \qquad\qquad \theta_{ic}' = \theta_i' - \theta_c.$$

Notiamo a questo punto che le leggi di conservazione, applicate al riferimento del centro di massa, nel quale l'impulso totale è nullo, ammettono come unica soluzione non banale

$$\theta_{ic}' = -\theta_{ic}.$$

Ne conseguono immediatamente le relazioni

$$\theta_i + \theta_i' = 2\,\theta_c,$$

ovvero

$$\theta_i' = 2\,\theta_c - \theta_i.$$

Questi risultati si potevano anche derivare direttamente senza considerare le proprietà del riferimento del centro di massa, notando che da una semplice manipolazione delle leggi di conservazione si ricava la relazione

$$\frac{\cosh\theta_1 - \cosh\theta_1'}{\sinh\theta_1 - \sinh\theta_1'} = \frac{\cosh\theta_2 - \cosh\theta_2'}{\sinh\theta_2 - \sinh\theta_2'},$$

dalla quale mediante applicazione della trigonometria iperbolica si ottiene

$$\tanh\frac{\theta_1 + \theta_1'}{2} = \tanh\frac{\theta_2 + \theta_2'}{2},$$

che implica appunto $2\,\Theta \equiv \theta_1 + \theta_1' = \theta_2 + \theta_2'$, ovvero il cambio di segno della rapidità relativa $\theta_1 - \theta_2 = \theta_2' - \theta_1'$.

Sostituendo questi risultati nelle leggi di conservazione si ottiene

$$m_1 \sinh \frac{\theta_1 - \theta_1'}{2} = m_2 \sinh \frac{\theta_2' - \theta_2}{2},$$

da cui tramite la sostituzione $\theta_i' = 2\,\Theta - \theta_i$ si ricava

$$m_1 \sinh(\theta_1 - \Theta) = m_2 \sinh(\Theta - \theta_2),$$

che con semplici manipolazioni si riduce a $\Theta = \theta_c$, rimandandoci ai risultati precedenti.

Si noti che tutte le relazioni lineari tra le rapidità che abbiamo ottenuto hanno una corrispondenza diretta con le relazioni lineari tra le velocità che valgono nella collisione elastica non relativistica in una dimensione.

Problema R.2

L'emissione del segnale, osservata nel riferimento terrestre, avviene nella posizione $x_E = 0$ al tempo $t_E = R/v$. Il ricevimento del segnale avviene invece al tempo t_R quando l'astronave si trova nella posizione $x_R = vt_R$.

Poiché la propagazione del segnale avviene alla velocità c deve valere $vt_R = c(t_R - t_E)$, da cui segue $(c - v)t_R = cR/v$, e risolvendo si ricava

$$x_R = \frac{R}{1 - \frac{v}{c}}, \qquad\qquad t_R - t_E = \frac{R}{c - v}.$$

Nel riferimento dell'astronave la coordinata e il tempo di emissione del segnale si ottengono da una trasformazione di Lorentz:

$$x_E' = -\gamma(v) R, \qquad\qquad t_E' = \gamma(v)\frac{R}{v},$$

e analogamente si ricava

$$x_R' = 0, \qquad\qquad t_R' = \gamma(v)\frac{R}{v}\left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

È quindi immediato ricavare

$$t_R' - t_E' = \gamma(v)\frac{R}{c} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}(t_R - t_E)$$

Problema R.3

Conviene scrivere l'equazione del moto utilizzando la variabile rapidità e notando che, posto $\beta = \tanh\theta$, vale

$$\frac{d(\beta\gamma)}{dt} = \cosh\theta \frac{d\theta}{dt},$$

per cui risulta

$$mc\frac{d(\beta\gamma)}{dt} = mc\cosh\theta\frac{d\theta}{dt} = F = F_0\frac{1-\tanh\theta}{(1+\tanh\theta)^2}.$$

Introducendo la costante $K \equiv F_0/mc$ si ottiene quindi l'equazione

$$\frac{d\theta}{dt} = K\, e^{-3\theta},$$

che pu essere integrata senza difficoltà. Se scegliamo la costante di integrazione in modo tale da avere $\theta(0) = 0$ otteniamo

$$e^{3\theta} = 1 + 3Kt.$$

Ricordando la definizione di θ si ricava

$$e^{\theta} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{2}} = (1+3Kt)^{\frac{1}{3}},$$

da cui finalmente

$$\beta = \frac{(1+3Kt)^{\frac{2}{3}}-1}{(1+3Kt)^{\frac{2}{3}}+1}, \qquad \gamma = \frac{1+(1+3Kt)^{\frac{2}{3}}}{2(1+3Kt)^{\frac{1}{3}}}.$$

Il calcolo della derivata della rapidità rispetto al tempo proprio si effettua semplicemente ricordando che questa quantità coincide con il valore dell'accelerazione (longitudinale) nel riferimento di quiete istantanea (diviso c), e tale valore a sua volta si ottiene da quello della forza (longitudinale) diviso per quello della massa (e per c). Risulta quindi

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \cosh\theta\frac{d\theta}{dt} = K\cosh\theta\, e^{-3\theta}.$$

In questo problema è quindi possibile anche effettuare il calcolo esplicito della relazione tra tempo proprio e rapidità, ottenendo

$$\tau = \frac{1}{K}\left[e^{2\theta} - 1 - \ln\frac{e^{2\theta}+1}{2}\right]$$

Problema A.1

Possiamo utilizzare coordinate polari piane per il corpo m_1, notando che per il corpo m_2 vale $z = l - r$. La Lagrangiana prende quindi la forma

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1 r^2 \dot{\varphi}^2 - m_2 g r.$$

Le equazioni del moto che ne risultano sono

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} = m_1 r \dot{\varphi}^2 - m_2 g,$$

$$m_1 r^2 \dot{\varphi} = M,$$

dove M è una costante del moto (momento angolare). Sostituendo risulta quindi:

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} = \frac{M^2}{m_1 r^3} - m_2 g.$$

La condizione di equilibrio dinamico fissa quindi la relazione tra M e il raggio r_0 del moto circolare:

$$M^2 = m_1 m_2 g r_0^3,$$

e possiamo quindi per comodità di notazione eliminare M^2 in favore di r_0.

L'equazione per le piccole oscillazioni si ottiene partendo dall'equazione del moto

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} = m_2 g\left(\frac{r_0^3}{r^3} - 1\right),$$

sostituendo r con $r_0 + \eta$ e sviluppando al primo ordine in η, per cui vale

$$(m_1 + m_2)\ddot{\eta} = -\frac{3\, m_2 g}{r_0}\eta.$$

La frequenza delle piccole oscillazioni è quindi

$$\omega^2 = \frac{3\, m_2 g}{(m_1 + m_2) r_0}.$$

Notiamo invece che il moto circolare uniforme è caratterizzato da una frequenza ω_0 che si ricava dalla definizione $M = m_1 r_0^2 \omega_0$ e dalla relazione precedente:

$$\omega_0^2 = \frac{m_2 g}{m_1 r_0}.$$

Dal confronto diretto segue la relazione generale

$$\omega^2 = \frac{3 m_1}{m_1 + m_2}\omega_0^2,$$

che come si vede dipende solo dal rapporto tra le masse ed è indipendente da r_0.

Problema A.2

Il modo più semplice per ottenere la trasformazione $Q = f(p)$ consiste nell'introdurre la funzione generatrice

$$F_4(p, P) = f(p)P,$$

che implica

$$Q = \frac{\partial F_4}{\partial P} = f(p),$$

$$q = -\frac{\partial F_4}{\partial p} = -f'(p)P.$$

È quindi immediato ricavare

$$P = -\frac{q}{f'(p)}.$$

Notando che Q non dipende da q facile verificare che

$$\{Q, P\}_{q,p} = -\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{f'(p)}{f'(p)} = 1$$

Problema A.3

Partiamo dall'Hamiltoniana del sistema

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r},$$

e notiamo che vale l'equazione $\dot{p}_\varphi = 0$, da cui segue banalmente

$$I_\varphi = p_\varphi = L.$$

Scrivendo poi la conservazione dell'energia

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

si ricava la relazione che ci interessa

$$p_r = \sqrt{2m\Big(E + \frac{\alpha}{r}\Big) - \frac{L^2}{r^2}}.$$

Per il calcolo di I_r notiamo che nei punti di inversione r_M e r_m vale $p_r = 0$, e perciò si può anche scrivere

$$p_r = L\sqrt{\Big(\frac{1}{r_m} - \frac{1}{r}\Big)\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_M}\Big)}.$$

Risulta quindi

$$I_r = \frac{L}{\pi}\int_{r_m}^{r_M} \sqrt{\Big(\frac{1}{r_m} - \frac{1}{r}\Big)\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_M}\Big)}dr = L\Big(\frac{r_M + r_m}{2\sqrt{r_M r_m}} - 1\Big).$$

Risolvendo esplicitamente l'equazione di secondo grado $p_r = 0$ si trova che esistono soluzioni fisicamente accettabili soltanto per $E < 0$, e in tal caso vale

$$r_{M,m} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2L^2\frac{|E|}{m}}}{2|E|},$$

da cui segue anche

$$|E| = \frac{\alpha}{r_M + r_m}, \qquad\qquad L = \sqrt{2\alpha m\frac{r_M r_m}{r_M + r_m}}.$$

Sostituendo i valori trovati nell'espressione di I_r si ricava

$$I_r = -L + \alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}.$$

Invertendo le relazioni ottenute si ottiene infine

$$L = I_\varphi, \qquad\qquad |E| = \frac{m\alpha^2}{2(I_r + I_\varphi)^2}.$$

N.B. La valutazione dell'integrale definito necessario per il calcolo di I_r si effettua mediante il cambio di variabili

$$r = \frac{1}{2}(r_M + r_m) + \frac{1}{2}(r_M - r_m)\cos\theta$$

che riduce l'integrale alla forma

$$\frac{L}{\pi}\frac{1}{\sqrt{A^2 - 1}}\int_0^\pi \frac{\sin^2\theta}{A + \cos\theta}d\theta,$$

dove $A = \frac{r_M + r_m}{r_M - r_m}$.

Basta a questo punto ricordare l'integrale definito (calcolabile col metodo dei residui)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\theta}{A + \cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{A^2 - 1}}$$

per ottenere il risultato desiderato.