FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2006/2007
Primo appello - Sessione invernale
Venerdì 12 Gennaio 2007 - ore '5

SOLUZIONI

Problema R.1

1) Le trasformate delle velocità nel nuovo riferimento devono essere uguali e opposte. Vale pertanto la condizione

$$\frac{v_1 - V}{1 - \frac{v_1 V}{c^2}} = -\frac{v_2 - V}{1 - \frac{v_2 V}{c^2}},$$

dalla quale segue l'equazione

$$(v_1 + v_2)\frac{V^2}{c^2} - 2\,(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2})\,V + (v_1 + v_2) = 0.$$

Risolvendo si ottiene la risposta alla domanda nella forma

$$V = \frac{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} - \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}{\frac{v_1 + v_2}{c^2}},$$

dove la scelta del segno è stata effettuata imponendo il corretto limite non relativistico $V \to \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$.

Non è difficile verificare che la risposta poteva essere espressa anche nella forma

$$V = \frac{v_1\gamma(v_1) + v_2\gamma(v_2)}{\gamma(v_1) + \gamma(v_2)},$$

deducibile dall'analisi della cinematica del centro di massa di un sistema di due particelle di ugual massa.

2) Esprimendo le velocità v_1 e v_2 in termini delle rispettive rapidità si ottiene la relazione

$$\frac{V}{c} = \frac{\cosh\theta_1\cosh\theta_2 + \sinh\theta_1\sinh\theta_2 - 1}{\cosh\theta_2\sinh\theta_1 + \cosh\theta_1\sinh\theta_2} = \frac{\cosh(\theta_1 + \theta_2) - 1}{\sinh(\theta_1 + \theta_2)},$$

da cui usando semplici relazioni di trigonometria iperbolica si ottiene facilmente

$$\frac{V}{c} = \tanh\frac{\theta_1 + \theta_2}{2},$$

come si doveva dimostrare.

Problema R.2

Scriviamo le leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto:

$$M_0\gamma(V) = m_1\gamma(v_1) + m_2\gamma(v_2),$$
$$M_0 V\,\gamma(V) = m_1 v_1\gamma(v_1) + m_2 v_2\gamma(v_2),$$

da cui con semplici manipolazioni si ottiene

$$m_1 = M_0\frac{\gamma(V)(V - v_2)}{\gamma(v_1)(v_1 - v_2)}, \qquad m_2 = M_0\frac{\gamma(V)(V - v_1)}{\gamma(v_2)(v_2 - v_1)}.$$

Problema A.1

Introduciamo i seguenti vettori bidimensionali fissi, tutti di lunghezza l_0:

$$\mathbf{r}_1 = (0, l_0), \qquad \mathbf{r}_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2} l_0, -\frac{1}{2} l_0), \qquad (-\frac{\sqrt{3}}{2} l_0, -\frac{1}{2} l_0),$$

con la proprietà che $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = 0$, per cui la posizione di equilibrio si trova nell'origine.

La Lagrangiana può essere scritta in termini della coordinata generalizzata $\mathbf{r}$, che è un vettore bidimensionale rappresentante lo scostamento dalla posizione di equilibrio. La forma della Lagrangiana esatta è allora

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{2} K \Big[(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - l_0)^2 + (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| - l_0)^2 + (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3| - l_0)^2 \Big].$$

Per determinare le piccole oscillazioni occorre sviluppare l'espressione precedente nelle potenze di $\mathbf{r}$, trovando che vale

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| \approx l_0 \big(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i}{l_0^2}\big),$$

per cui $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| - l_0 \approx -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i}{l_0}$, che è già una quantità del primo ordine. Vale pertanto

$$L \approx \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{2} K \Big[(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1}{l_0})^2 + (\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_2}{l_0})^2 + (\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_3}{l_0})^2 \Big].$$

Sostituendo le espressioni esplicite dei vettori $\mathbf{r}_i$ è però facile mostrare che vale

$$\sum_i (\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i}{l_0})^2 = \frac{3}{2} \mathbf{r}^2,$$

da cui in conclusione si ricava per le piccole oscillazioni la Lagrangiana

$$L \approx \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{3}{4} K \mathbf{r}^2.$$

Le frequenze proprie sono quindi tra loro uguali e valgono

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{3\,K}{2\,m}}.$$

Poiché le frequenze sono uguali ogni coppia di assi ortogonali passanti per l'origine individua le direzioni di due modi propri.

Problema A.2

Affinché un sistema di equazioni sia canonico esso deve essere compatibile con la forma

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

da cui per consistenza deve valere $\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = 0$.

Nel nostro caso ciò implica

$$\gamma\, p + 2\,\delta\, q - 2\,\alpha\, p - \beta\, q = 0,$$

da cui si ricava subito

$$\gamma = 2\,\alpha, \qquad \beta = 2\,\delta.$$

Se ora imponiamo la forma canonica delle equazioni

$$\dot{p} = -\alpha\, p^2 - 2\,\delta\, p\, q = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

$$\dot{q} = 2\,\alpha\, p\, q + \delta\, q^2 = \frac{\partial H}{\partial p},$$

troviamo l'Hamiltoniana nella forma

$$H = \alpha\, p^2\, q + \delta\, q^2\, p.$$

Una trasformazione canonica tale che $Q = p\, q$ deve soddisfsre

$$p = \frac{Q}{q} = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \qquad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q},$$

da cui è semplice dedurre la soluzione

$$F_1(q, Q) = Q\, \ln q,$$

che a sua volta implica $P = -\ln q$.

Dal sistema ottenuto si ricava poi facilmente

$$q = e^{-P}, \qquad p = Q\, e^{P},$$

e sostituendo nell'Hamiltoniana si ottiene

$$K = Q\big[\alpha\, Q\, e^{P} + \delta\, e^{-P}\big].$$

La soluzione non è certamente unica: per esempio scrivendo $q = \frac{Q}{p}$ e utilizzando F_3 si può ottenere un'altra e altrettanto valida soluzione nella forma:

$$q = Q\, e^{-P}, \qquad p = e^{P}, \qquad K = Q\big[\alpha\, e^{P} + \delta\, Q\, e^{-P}\big].$$