FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2007/2008
Primo appello - Sessione invernale
Venerdì 11 Gennaio 2008 - ore 15

SOLUZIONI

Problema R.1

1) La conservazione dell'energia implica immediatamente che per tre fotoni di uguale frequenza ν_0 deve valere $3\,h\,\nu_0 = 2\,m_e c^2$, da cui subito

$$\lambda_0 \equiv \frac{c}{\nu_0} = \frac{3\,h\,c}{2\,m_e c^2} = \frac{3}{2}\lambda_c.$$

2) Nel riferimento di quiete del positronio i tre fotoni si muovono su un piano formando angoli di $\frac{2\Pi}{3}$ tra le loro direzioni di moto. Di conseguenza scegliendo come direzione x positiva quella del moto del terzo fotone risulta per le componenti d'impulso degli altri due

$$k_{1x} = k_{2x} = -\frac{h\,\nu}{2\,c}, \qquad\qquad k_{1y} = -k_{2y} = \frac{\sqrt{3}\,h\,\nu}{2\,c}.$$

la velocità del centro di massa dei primi due fotoni è quindi

$$v_x = \frac{(k_{1x} + k_{2x})c^2}{2\,h\,\nu} = -\frac{1}{2}c,$$

da cui anche $\gamma(v_x) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Di conseguenza, effettuando la trasformazione di Lorentz al riferimento del centro di massa dei due fotoni si ottiene

$$\nu' = \gamma(v_x)\big(1 + \frac{1}{2}\big)\nu_0 = \sqrt{3}\nu_0,$$

ed è immediato ottenere la soluzione

$$\lambda' = \frac{\lambda_0}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_c.$$

Si noti che le lunghezze d'onda dei primi due fotoni valgono invece $\sqrt{3}\lambda_c$.

Problema R.2

1) Non è difficile calcolare i minori $M_{\mu\nu}$ degli elementi di matrice di $A_{\mu\nu}$, sfruttando anche le proprietà di covarianza per rotazioni, e calcolando quindi soltanto ad esempio i minori M_{01} ed M_{23}, che sono determinanti di matrici 3×3 Moltiplicando per l'opportuno fattore derivante dall'ordine della permutazione si ottiene quindi

$$M_{0i} = b_i \, (\sum_j b_j c_j), \qquad\qquad M_{ij} = \epsilon_{ijk} c_k \, (\sum_j b_j c_j).$$

A questo punto il determinante può essere calcolato semplicemente da

$$\det A_{\mu\nu} = \sum_i A_{0i} M_{0i} = (\sum_i b_i c_i)(\sum_j b_j c_j).$$

Per quanto riguarda $\det A_{ij}$ si può procedere al calcolo diretto o semplicemente osservare che, poiché $\det A_{ij} = M_{00}$ e l'inversa di una matrice antisimmetrica è anch'essa antisimmetrica, la relazione $\det A_{ij} = 0$ segue necessariamente.

2) Nel caso in cui $A_{\mu\nu} = P_\mu Q_\nu - P_\nu Q_\mu$ valgono banalmente le relazioni vettoriali

$$\mathbf{c} = p_0 \mathbf{q} - q_0 \mathbf{p}, \qquad\qquad \mathbf{b} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}.$$

Di conseguenza risulta subito $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$ in quanto $\mathbf{c}$ giace sul piano ortogonale a $\mathbf{b}$.

3) Il risultato per l'inversa è una banale conseguenza del fatto che l'inversa si ottiene dalla trasposta della matrice dei minori divisa per il determinante, e la trasposta di una matrice antisimmetrica è la matrice stessa cambiata di segno.

Tutto il problema poteva essere anche affrontato mediante calcoli diretti semplificando la forma della matrice grazie alla covarianza per rotazioni, scegliendo ad esempio come componenti non nulle soltanto c_1, b_1 e b_2, e notando che il determinante deve comunque essere uno scalare per rotazioni.

1) La Lagrangiana in notazione vettoriale vale

$$L = \frac{1}{2} m\, \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{2} K \mathbf{r}^2 + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}},$$

dove, posto $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \wedge m\, \dot{\mathbf{r}}$, vale $\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \wedge \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{L}}{m}$.

Passando a coordinate cilindriche risulta quindi

$$L = \frac{1}{2} m \big(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \big) - \frac{1}{2} K \big(\rho^2 + z^2 \big) + \omega_B m\, \rho^2 \dot{\varphi},$$

dove abbiamo introdotto la costante $\omega_B = \frac{q\, B}{2\, m\, c}$ che ha le dimensioni fisiche di una frequenza.

L'equazione del moto radiale risultante è

$$m \ddot{\rho} = -K \rho + m\, \rho \dot{\varphi}^2 + 2\, m\, \rho \omega_B \dot{\varphi},$$

che, posto $K \equiv m \omega_0^2$, può essere riscritta nella forma

$$\ddot{\rho} = -(\omega_0^2 + \omega_B^2) \rho + (\dot{\varphi} + \omega_B)^2 \rho,$$

mentre per la coordinata angolare si ottiene

$$m \rho^2 (\dot{\varphi} + \omega_b) = M,$$

dove M è una costante del moto (momento coniugato alla variabile ciclica φ), e infine si ricava

$$\ddot{z} = -\omega_0^2 z.$$

2) Trascurando la dipendenza da z, che è banale e disaccoppiata, troviamo per la funzione di Routh la relazione

$$R = M\, \dot{\varphi} - L(\rho, \varphi) = \frac{M^2}{2\, m\, \rho^2} - \frac{1}{2} m\, \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m\, \rho^2 (\omega_0^2 + \omega_B^2).$$

L'equazione del moto radiale risultante è

$$\ddot{\rho} = \frac{M^2}{m^2 \rho^3} - (\omega_0^2 + \omega_B^2) \rho,$$

che è equivalente alla precedente ma coincide anche con l'equazione del moto per un oscillatore armonico tridimensionale con momento angolare M e frequenza $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_B^2}$.

La soluzione dell'equazione radiale vale quindi

$$\rho(t) = \sqrt{a^2 \cos^2 \omega (t - t_0) + b^2 \sin^2 \omega (t - t_0)},$$

col vincolo $\omega\, a\, b = M$, e si può verificare che questa formula è equivalente a quella che si può trovare col metodo descritto in A.2.31

Problema A.2

Il calcolo delle parentesi di Poisson si effettua applicando la definizione generale $\{f,\, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$ alle quantità

$$H = \frac{1}{2\,m}\mathbf{p}^2, \qquad D = \frac{1}{2}\mathbf{p}\big(\frac{\mathbf{p}t}{m} - \mathbf{r}\big), \qquad K = -\frac{1}{2}m\big(\frac{\mathbf{p}t}{m} - \mathbf{r}\big)^2,$$

le cui espressioni, ricordando che si tratta di una particella libera, rendono già evidente il fatto che si tratta di quantità conservate.

Il risultato del calcolo diretto è il seguente:

$$\{H,\, D\} = H, \qquad \{H,\, K\} = -2\,D, \qquad \{D,\, K\} = K.$$

2) Ricordando la formula generale $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f,\, H\}$ e notando che vale

$$\frac{\partial D}{\partial t} = H, \qquad\qquad \frac{\partial K}{\partial t} = -2\,D$$

è immediato verificare che $\dot{D} = 0$ e $\dot{K} = 0$, e il risultato è consistente con il teorema per cui la parentesi di Poisson di due quantità conservate è anch'essa una quantità conservata.

Notiamo poi che, poiché per la particella libera vale

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0, \qquad\qquad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{p}t}{m} + \mathbf{r}_0,$$

sostituendo si trova facilmente

$$H = \frac{1}{2\,m}\mathbf{p}_0^2, \qquad D = -\frac{1}{2}\mathbf{p}_0\mathbf{r_0}, \qquad K = -\frac{1}{2}m\mathbf{r}_0^2,$$

come del resto ci si poteva aspettare anche dalla definizioni originali.