FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2008/2009
Primo appello - Sessione invernale
Martedì 13 Gennaio 2009 - ore 15

SOLUZIONI

Problema R.1

L'intervallo spaziotemporale tra il primo e il terzo evento puó essere scritto nella forma

$$s_{13}^2 = (t_3 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)^2 = (t_3 - t_2 + t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2,$$

da cui sviluppando

$$s_{13}^2 = s_{23}^2 + s_{12}^2 + 2(t_3 - t_2)(t_2 - t_1) - 2(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

Notiamo poi che per ipotesi

$$t_3 - t_2 > |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|, \qquad t_2 - t_1 > |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|,$$

e di conseguenza

$$s_{23}^2 > 0, \qquad s_{12}^2 > 0,$$

$$(t_3 - t_2)(t_2 - t_1) > |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)||(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \geq (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

L'insieme di questi risultati implica immediatamente $s_{13}^2 > 0$.

Conviene a questo punto effettuare una trasformazione di Lorentz, passando al riferimento che viaggia con velocitá

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{t_3 - t_1}$$

rispetto al precedente.

É facile verificare che le nuove coordinate degli eventi soddisfano le relazioni

$$\mathbf{r}'_3 - \mathbf{r}'_1 = 0, \qquad \mathbf{r}'_3 - \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2 \equiv \Delta\mathbf{r}'.$$

Di conseguenza, sfruttando l'invarianza relativistica dell'intervallo, si ottiene:

$$s_{12}^2 = (t'_2 - t'_1)^2 - (\Delta\mathbf{r}')^2 \leq (t'_2 - t'_1)^2,$$

$$s_{23}^2 = (t'_3 - t'_2)^2 - (\Delta\mathbf{r}')^2 \leq (t'_3 - t'_2)^2,$$

$$s_{13}^2 = (t'_3 - t'_1)^2.$$

Ricordando la relazione tra tempo proprio e intervallo $c\tau = \sqrt{s^2}$ si ricava quindi

$$\tau_{12} + \tau_{23} \leq \tau_{13}.$$

Problema R.2

Nel riferimento di quiete di ciascun pione i fotoni sono emessi in direzioni opposte lungo un asse che forma un angolo θ_c con la direzione del moto del fascio. Applicando la legge di trasformazione relativistica delle componenti del quadrimpulso si puó calcolare il corrispondente angolo $\theta_\pm$ nel riferimento del laboratorio:

$$\tan\theta_\pm = \pm\frac{\sin\theta_c}{\gamma(\beta \pm \cos\theta_c)},$$

dove $\beta c =\equiv v$ é la velocitá del pione nel riferimento del laboratorio.

Calcoliamo quindi l'angolo tra i due fotoni nel riferimento del laboratorio:

$$\tan\frac{\theta_+ - \theta_-}{2} = \frac{1}{\gamma\beta\sin\theta_c}.$$

Di conseguenza l'angolo minimo φ tra due fotoni, per un valore fissato di β, soddisfa la relazione

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\gamma\beta} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}.$$

Da questa relazione é immediato ricavare

$$\gamma = \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Il minimo assoluto φ_m tra i valori osservati di φ corrisponde quindi al massimo valore di γ presente nel fascio, e di conseguenza alla massima energia E_M, che soddisfa quindi

$$E_M = \frac{m_\pi c^2}{\sin\frac{\varphi_m}{2}}.$$

Problema A.1

Indichiamo con x_1 e x_2 le coordinate dellle masse laterali, e sia X la coordinata della massa centrale. Il vincolo di allineamento delle tre masse é soddisfatto imponendo la relazione

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

La Lagrangiana nelle variabili x_1 e x_2 ha quindi la forma

$$L = \frac{1}{2}(m + \frac{M}{4})(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{4}M\dot{x}_1\dot{x}_2 - \frac{1}{2}(k + \frac{K}{4})(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{4}Kx_1x_2.$$

A questo punto sarebbe possibile ottenere procedere al calcolo delle due frequenze proprie per un sistema a due gradi di libertá con la tecnica usuale. Conviene invece diagonalizzare direttamente la forma quadratica, introducendo la variabile $\delta = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$ e scrivendo quindi

$$x_1 = X + \delta, \qquad\qquad x_2 = X - \delta.$$

La Lagrangiana nelle variabili X e δ prende la forma

$$L = \frac{1}{2}(M + 2m)\dot{X}^2 + m\dot{\delta}^2 - \frac{1}{2}(K + 2k)X^2 - k\delta^2.$$

É quindi evidente che X e δ sono le variabili che rappresentano i modi propri del sistema, e le corrispondenti frequenze proprie si ricavano immediatamente dalla Lagrangiana:

$$\omega_X^2 = \frac{K + 2k}{M + 2m}, \qquad\qquad \omega_\delta^2 = \frac{k}{m}.$$

L'interpretazione fisica dei due modi propri é intuitiva.

Problema A.2

É possibile procedere alla dimostrazione con il calcolo delle parentesi di Poisson fondamentali. Le derivate parziali rilevanti al calcolo sono:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2},$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial x} = -\frac{y}{r^3}p_\theta, \qquad \frac{\partial p_r}{\partial y} = \frac{x}{r^3}p_\theta,$$

$$\frac{\partial p_\theta}{\partial x} = p_y, \qquad \frac{\partial p_\theta}{\partial y} = -p_x,$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial p_x} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial p_r}{\partial p_y} = \frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial p_\theta}{\partial p_x} = -y, \qquad \frac{\partial p_\theta}{\partial p_y} = x.$$

Risulta a questo punto facile verificare che

$$\{r, \theta\} = 0, \qquad\qquad \{p_r, p_\theta\} = \frac{1}{r}p_\theta - \frac{1}{r}p_\theta = 0,$$

ma anche

$$\{r, p_\theta\} = 0, \qquad\qquad \{\theta, p_r\} = 0,$$

e infine

$$\{r, p_r\} = 1, \qquad\qquad \{\theta, p_\theta\} = 1.$$

Alternativamente si puó osservare che la trasformazione (passaggio a coordinate polari) é di tipo puntuale, e verificare che p_r e p_θ soddisfano le condizioni richieste per la canonicitá di una trasformazione puntuale in due dimensioni, descritte nella soluzione dell'esercizio B.2.31.