FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2009/2010
Primo appello - Sessione invernale
Venerdì 15 Gennaio 2010 - ore 9

SOLUZIONI

Problema A.1

1) Il potenziale elettrico corrispondente a un campo della forma assegnata si ricava facilmente per integrazione diretta nella variabile ρ e vale $V = -\lambda \ln \rho$.

A sua volta l'energia potenziale si ottiene moltiplicando il potenziale per la carica e vale quindi $U = q\,\lambda \ln \rho$.

Di conseguenza, introducendo le coordinate cilindriche

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \arctan \frac{y}{x}, \qquad z,$$

la Lagrangiana $L = T - U$ prende la forma

$$L = \frac{1}{2} m[\dot\rho^2 + \rho^2 \dot\theta^2 + \dot z^2] - q\,\lambda \ln \rho.$$

2) Esaminando la Lagrangiana si riconosce immediatamente che le coordinate θ e z sono cicliche. Di conseguenza i momenti coniugati

$$p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m\,\rho^2 \dot\theta, \qquad p_z \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot z} = m\,\dot z$$

sono costanti del moto.

Poiché la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo anche l'energia

$$E = \dot\rho\, p_\rho + \dot\theta\, p_\theta + \dot z\, p_z - L = T + U$$

è una costante del moto.

3) La funzione di Routh si ricava immediatamente dalla definizione:

$$R = \dot\theta\, p_\theta + \dot z\, p_z - L = \frac{p_\theta^2}{2\,m\,\rho^2} + \frac{p_z^2}{2\,m} - \frac{1}{2} m\,\dot\rho^2 + q\,\lambda \ln \rho.$$

4) L'equazione del moto per la coordinata ρ si ricava facilmente dalla funzione di Routh e ha la forma

$$m\,\ddot\rho = \frac{p_\theta^2}{m\,\rho^3} - \frac{q\,\lambda}{\rho}.$$

La condizione di equilibrio dinamico comporta $\ddot\rho = \dot\rho = 0$ e pertanto, detto ρ_0 il valore di ρ all'equilibrio, deve valere

$$\frac{p_\theta^2}{m\,\rho_0^3} - \frac{q\,\lambda}{\rho_0} = 0,$$

da cui immediatamente si ricava la relazione

$$\rho_0 = \frac{p_\theta}{\sqrt{m\rho\lambda}}.$$

È utile introdurre anche la frequenza di rotazione (del moto circolare o elicoidale) all'equilibrio ω_0; dalle definizioni e dai risultati precedenti si ricavano le relazioni

$$\omega_0 = \frac{p_\theta}{m\,\rho_0^2} = \frac{q\,\lambda}{p_\theta},$$

e vale anche

$$\omega_0\rho_0 = \sqrt{\frac{q\,\lambda}{m}}$$

.

Si noti che queste relazioni permettono di esprimere sia ρ_0 che p_θ in termini di ω_0, e ciò risulterà utile quando nelle equazioni incontreremo combinazioni di queste quantità che hanno le dimensioni del quadrato di una frequenza.

5) Possiamo ottenere la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alla configurazione di equilibrio dinamico semplicemente sostituendo $\rho = \rho_0 + \eta$ nell'equazione del moto e sviluppando al primo ordine in η. L'equazione risultante è

$$m\,\ddot{\eta} = -\left(\frac{3\,p_\theta^2}{m\,\rho_0^4} - \frac{q\,\lambda}{\rho_0^2}\right)\eta.$$

Esprimendo p_θ e ρ_0 in termini di ω_0 possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$\ddot{\eta} = -2\,\omega_0^2\,\eta,$$

da cui segue immediatamente che la frequenza delle piccole oscillazioni è

$$\omega = \sqrt{2}\omega_0.$$

Poichè il rapporto tra le due frequenze è itrrazionale non possono esistere orbite chiuse nemmeno in regime di piccole oscillazioni.

6) La funzione generatrice della trasformazione canonica corrispondente alla trasformazione puntuale che lega le coordinate cartesiane ortogonali a quelle cilindriche è

$$F_2(x, y, z, p_\rho, p_\theta, p_z) = \sqrt{x^2 + y^2}\,p_\rho + \arctan\frac{y}{x}\,p_\theta + z\,p_z,$$

ed è immediato ricavare

$$p_x \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}p_\rho - \frac{y}{x^2 + y^2}p_\theta = p_\rho\cos\theta - \frac{p_\theta}{\rho}\sin\theta,$$

$$p_y \equiv \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} p_\rho + \frac{x}{x^2+y^2} p_\theta = p_\rho \sin\theta + \frac{p_\theta}{\rho}\cos\theta.$$

Queste relazioni possono a loro volta essere invertite per ottenere la forma finale della trasformazione:

$$p_\rho = \frac{x\,p_x + y\,p_y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad\qquad p_\theta = x\,p_y - y\,p_x,$$

come del resto ci si poteva aspettare.

Problema R.1

1) La relazione di conservazione del quadrimpulso permette di ricavare la sequente equazione per i quadrivettori delle particelle coinvolte nel processo:

$$P_\nu = P_\pi - P_\mu.$$

Prendendo la norma sui due lati dell'equazione, ricordando che il neutrino è una particella a massa nulla e calcolando il prodotto scalare $P_\pi \cdot P_\mu$ nel riferimento del laboratorio, posto $c = 1$ è immediato ottenere dalla relazione

$$0 = m_\pi^2 + m_\mu^2 - 2\,P_\pi \cdot P_\mu$$

la relazione

$$m_\pi^2 + m_\mu^2 - 2\,E_\pi E_\mu = p_\pi p_\mu \cos\theta_\mu,$$

dove p_π e p_μ sono i moduli degli impulsi delle due particelle nel riferimento del laboratorio.

Quadrando i due lati dell'equazione è ora possibile trasformarla in un'equazione algebrica di secondo grado per la variabile E_μ:

$$(m_\pi^2 + m_\mu^2 - 2\,E_\pi E_\mu)^2 = 4\,(E_\mu^2 - m_\mu^2) p_\pi^2 \cos^2\theta_\mu.$$

La soluzione dell'equazione algebrica può essere posta, con semplici manipolazioni, nella forma

$$E_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)E_\pi \pm p_\pi \cos\theta_\mu \sqrt{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2 - 4\,p_\pi^2 m_\mu^2 \sin^2\theta_\mu}}{2\,[E_\pi^2 - p_\pi^2 \cos^2\theta_\mu]}.$$

Un'ulteriore semplificazione si può ottenere ricordando che nel riferimento del centro di massa l'energia e l'impulso del muone assumono i valori (costanti)

$$\varepsilon_{0\mu} \equiv \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2\,m_\pi}, \qquad\qquad p_{0\mu} \equiv \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2\,m_\pi},$$

e osservando che l'energia e l'impulso del pione nel riferimento del laboratorio possono essere messi in relazione con la velocità v del fascio mediante le equazioni

$$E_\pi = m_\pi \gamma(v), \qquad\qquad p_\pi = m_\pi \gamma(v) v.$$

Risulta allora in conclusione

$$E_\mu = \frac{\varepsilon_{0\mu} \pm v\,\cos\theta_\mu \sqrt{p_{0\mu}^2 - m_\mu^2 \gamma^2 v^2 \sin^2\theta_\mu}}{\gamma\,(1 - v^2 \cos^2\theta_\mu)}.$$

I valori accettabili di E_μ, e quindi l'eventuale scelta del segno, dipendono dal valore del rapporto tra v e la velocità del muone nel riferimento del centro di massa $v_{0\mu} = p_{0\mu}/\varepsilon_{0\mu}$: quando tale rapporto è maggiore di 1 l'angolo di diffusione non può superare un valore limite, e solo in questo caso entrambe le soluzioni sono accettabili.

Il problema è discusso in dettaglio nella soluzione dell'esercizio D.2.3

2) Se la vita media del muone in quiete è τ_μ, la vita media del muone in moto con velocità u, per l'effetto di dilatazione dei tempi, vale $\gamma(u)\tau_\mu$, e lo spazio medio percorso è dato dal prodotto della velocità per il tempo medio di volo, per cui risulta

$$l = \gamma(u)\,u\,\tau_\mu.$$

A loro volta u e $\gamma(u)$ possono essere ricavati dall'espressione dell'energia:

$$u = \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E_\mu^2}}, \qquad \gamma(u) = \frac{E_\mu}{m_\mu}.$$

In conclusione si ricava

$$l = \sqrt{\frac{E_\mu^2}{m_\mu^2} - 1}\,\tau_\mu.$$