FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2003/2004
Secondo appello - Sessione invernale
Lunedì 9 Febbraio 2004 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

La relazione che lega le frequenze dei fotoni nel riferimento del laboratorio alle frequenze di emissione nel riferimento di quiete della sorgente è, nel caso di emissione in avanti, l'equazione dell'effetto Doppler longitudinale ($i = 1, 2$):

$$\nu_{iL} = \nu_i \sqrt{\frac{1 + \frac{v_i}{c}}{1 - \frac{v_i}{c}}},$$

dove $v_i = |\mathbf{v}_i|$ è il modulo della velocità del moto della sorgente osservato nel laboratorio.

È a questo punto possibile scrivere il quadrimpulso dei fotoni nel riferimento del laboratorio nella forma

$$k_i^\mu = h\frac{\nu_{iL}}{c}\big[1, \frac{\mathbf{v}_i}{v_i}\big],$$

dove h è la costante di Planck.

La massa della particella prodotta dalla collisione totalmente anelastica dei due fotoni è esprimibile facilmente mediante la relazione che definisce l'energia dei fotoni nel riferimento del loro comune centro di massa:

$$M \equiv E_c = c\sqrt{(k_1 + k_2)^2} = c\sqrt{2k_1 \cdot k_2}.$$

Dal calcolo diretto risulta quindi

$$M = h\Big(\frac{(1 + \frac{v_1}{c})(1 + \frac{v_2}{c})}{(1 - \frac{v_1}{c})(1 - \frac{v_2}{c})}\Big)^{1/4}\sqrt{2\nu_1\nu_2(1 - \cos\theta_{12})},$$

dove θ_{12} è l'angolo formato dalle direzioni dei vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, ovvero

$$\cos\theta_{12} \equiv \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{v_1 v_2}.$$

Problema R.2

Notiamo innanzitutto che, per particelle dotate di massa a riposo costante, F^μ deve sempre soddisfare la relazione $F^\mu u_\mu = 0$, da cui sostituendo si ricava $x^\mu u_\mu = 0$, che a sua volta implica immediatamente

$$x^\mu x_\mu = -K^2,$$

ed è facile mostrare che la norma del quadrivettore x^μ deve essere minore di zero.

Nel caso di moto rettilineo questa condizione si riduce al caso del moto iperbolico; del resto la condizione trovata comporta anche la relazione $a^\mu a_\mu = costante$, che è la condizione per il moto soggetto ad accelerazione costante nel proprio riferimento di quiete istantanea.

Per il moto rettilineo nella direzione x si può esplicitare la soluzione in forma di legge oraria

$$x(t) = \sqrt{K^2 + c^2 t^2}.$$

Se si vuol prendere il limite non relativistico occorre tuttavia scegliere un riferimento che differisce dal precedente per una traslazione dell'origine spaziale: $x' = x + K'$, e si deve scegliere $K = \frac{c^2}{a}$ e $K' = x'_0 - K$, dove a e x'_0 sono quantità finite nel limite non relativistico. In questo modo risulta

$$x'(t) = x'_0 + \frac{c^2}{a}\Big(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1\Big)$$

e nel limite non relativistico

$$x'(t) \to x'_0 + \frac{1}{2} a t^2.$$

La soluzione più generale dell'equazione del moto

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = k x^\mu,$$

posto $\alpha \equiv \frac{k}{m}$, è semplicemente

$$x^\mu(\tau) = A^\mu e^{\alpha\tau} + B^\mu e^{-\alpha\tau},$$

dove A^μ e B^μ sono due quadrivettori costanti e soggetti ad alcuni vincoli.

Notiamo in particolare che la relazione $x^\mu x_\mu = -K^2$ implica

$$A^\mu A_\mu = 0, \qquad\qquad B^\mu B_\mu = 0$$

e anche la condizione $2A^\mu B_\mu = -K^2$. Ma quest'ultima condizione non è restrittiva, perché la si può sempre soddisfare con un'opportuna traslazione di τ. Pertanto la soluzione dipende in totale da sei parametri, tre per ciascuno dei due quadrivettori di tipo luce A^μ e B^μ. Questo risultato è fisicamente corretto perché le condizioni iniziali da fissare sono esattamente sei (coordinate della posizione e della velocità al tempo zero).

Il tempo complessivo del viaggio, misurato nel riferimento dei pianeti, soddisfa la relazione

$$T = \frac{D}{v_1} + \frac{D}{v_2}.$$

D'altra parte il tempo proprio dell'astronave può essere espresso mediante la relazione

$$\tau = \frac{D}{v_1}\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + \frac{D}{v_2}\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}.$$

Il problema di individuare il massimo condizionato di τ può essere affrontato in più modi diversi: mediante l'uso dei moltiplicatori di Lagrange, ossia minimizzando la funzione

$$\tau(v_1, v_2) - \lambda(T - \frac{D}{v_1} - \frac{D}{v_2}),$$

nelle variabili v_1, v_2 e λ, oppure ad esempio passando alle variabili $t_i \equiv \frac{D}{v_i}$ per cui risulta

$$\tau = \sqrt{t_1^2 - \frac{D^2}{c^2}} + \sqrt{t_2^2 - \frac{D^2}{c^2}}$$

e usando la relazione $T = t_1 + t_2$ basta minimizzare la funzione

$$\sqrt{t_1^2 - \frac{D^2}{c^2}} + \sqrt{(T - t_1)^2 - \frac{D^2}{c^2}}.$$

Dal calcolo è immediato ottenere la condizione

$$\frac{t_1}{\sqrt{t_1^2 - \frac{D^2}{c^2}}} = \frac{t_2}{\sqrt{t_2^2 - \frac{D^2}{c^2}}},$$

che è risolta da $t_1 = t_2$ ovvero $v_1 = v_2 = \frac{2D}{T}$.

Il massimo tempo proprio vale pertanto $\tau_M = \sqrt{T^2 - \frac{4D^2}{c^2}}$.

l'estremo opposto si trova al bordo del dominio nello spazio dei parametri, ovvero quando una delle due velocità è uguale a c. Risulta allora, ad esempio:

$$T = \frac{D}{v_1} + \frac{D}{c}, \qquad \tau = \frac{D}{v_1}\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}},$$

da cui per sostituzione diretta si ottiene

$$v_1 = \frac{D}{T - \frac{D}{c}}, \qquad \tau_m = \sqrt{T^2 - \frac{2DT}{c}},$$

che è sempre minore del precedente per valori fisicamente accettabili dei parametri.

Se infine l'astronave può effettuare una sosta, il tempo proprio minimo si ottiene effettuando entrambi i i percorsi alla velocità c, per cui τ è in questo caso uguale al tempo di sosta:

$$\tau_s = T - \frac{2D}{c}.$$

Problema A.1

La conservazione del momento angolare è assicurata in questo sistema dall'invarianza per rotazioni legata alla presenza di forze centrali. Poichè il moto avviene istantaneamente sul piano individuato dal raggio vettore $\mathbf{r}$ e dalla velocità $\mathbf{v}$, e tale piano è ortogonale alla direzione del vettore momento angolare, la conservazione di $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}$ implica la conservazione del piano su cui avviene il moto, e quindi la riducibilità a un problema piano.

Adottando coordinate polari piane r e φ è possibile scrivere le due leggi di conservazione del momento angolare e dell'energia nella forma

$$L = mr^2\dot{\varphi}, \qquad\qquad E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^2}.$$

Come si vede, il problema è ridotto a un problema equivalente in una sola dimensione in presenza di un potenziale effettivo

$$U_{eff}(r) = \frac{L^2 - 2m\alpha}{2mr^2}.$$

L'individuazione delle regioni percorribili dalle traiettorie è quindi ridotta allo studio delle conseguenze della disuguaglianza $E \geq U_{eff}(r)$.

Nel caso in cui $L^2 \geq 2m\alpha$ risulta necessariamente $E > 0$ e le traiettorie non sono confinate a una regione limitata dello spazio, essendo soggette soltanto al vincolo

$$r \geq r_m \equiv \sqrt{\frac{L^2 - 2m\alpha}{2mE}}.$$

Nel caso in cui $L^2 \leq 2m\alpha$, quando $E \geq 0$ le traiettorie sono ancora non confinate, e tutti i valori di r sono accessibili, mentre per $E < 0$ si ha la condizione

$$r \leq r_M \equiv \sqrt{\frac{L^2 - 2m\alpha}{2mE}}$$

che individua la regione limitata percorribile dalle traiettorie come funzione di L ed E.

Le equazioni del moto possono essere poste nella forma

$$m\ddot{r} = \frac{L^2 - 2m\alpha}{mr^3}, \qquad\qquad L = mr^2\dot{\varphi}.$$

Notiamo quindi immediatamente che un'invarianza si può avere soltanto se vale la trasformazione $L \to L$, e questo a sua volta si ottiene solo se $h = k^2$. Ma in tal caso è immediato verificare che entrambi i lati dell'equazione sotto la trasformazione risultano motiplicati per k^{-3}, e pertanto abbiamo ottenuto un'invarianza delle equazioni del moto. La legge di trasformazione risultante per l'energia è $E \to k^{-2}E$.

La legge di "similitudine" per le traiettorie consiste nell'asserzione che, se $r(t)$, $\varphi(t)$ è una soluzione delle equazioni del moto, allora anche $kr(k^2t)$, $\varphi(k^2t)$ è una soluzione per ogni valore di k.

Le traiettorie, nel caso $E < 0$, possono essere determinate risolvendo l'equazione (che consegue dalle precedenti)

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}} \frac{1}{r^2\sqrt{\frac{r_M^2}{r^2} - 1}}.$$

Passando alla variabile $v = \frac{1}{r}$ si ottiene l'equazione

$$d\varphi = -\frac{L}{\sqrt{2m|E|}} \frac{dv}{\sqrt{r_M^2 v^2 - 1}},$$

da cui immediatamente, essendo $\sqrt{2m|E|}r_M = \sqrt{2m\alpha - L^2}$, si ottiene, a meno di una costante d'integrazione

$$\varphi = -\frac{L}{\sqrt{2m\alpha - L^2}} \cosh^{-1} \frac{r_M}{r},$$

ovvero

$$r(\varphi) = \frac{r_M}{\cosh\left(\frac{\sqrt{2m\alpha - L^2}}{L}\varphi\right)}.$$

Notiamo che, poiché la legge di trasformazione di r_M, deducibile da quelle di E ed L, ha la forma $r_M \to k r_M$, l'espressione trovata per la traiettoria soddisfa esplicitamente la legge di similitudine.

Problema A.2

Dalle definizioni risulta immediatamente $\{p_j, A^\mu\} = -\frac{\partial A^\mu}{\partial q_j}$, e pertanto vale

$$\epsilon_{ijk}\{p_j, A_k\} = -\epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial q_j} = -B_i,$$

$$\{p_i, \phi\} = -\frac{\partial \phi}{\partial q_i} = E_i + \frac{\partial A_i}{\partial t},$$

dove B_i ed E_i sono rispettivamente le componenti dei campi magnetico ed elettrico.

Le identità di Jacobi rilevanti hanno in questo caso la forma

$$\epsilon_{ijk}\{p_i, \{p_j, A^\mu\}\} - \epsilon_{ijk}\{p_j, \{p_i, A^\mu\}\} + \epsilon_{ijk}\{A^\mu, \{p_i, p_j\}\} = 0.$$

Sfruttando l'antisimmetria del tensore ϵ_{ijk} e le parentesi fondamentali $\{p_i, p_j\} = 0$ dalla relazione precedente otteniamo immediatamente

$$2\,\epsilon_{ijk}\{p_i, \{p_j, A^\mu\}\} = 0,$$

che implica banalmente i risultati cercati

$$\epsilon_{ijk}\{p_i, \{p_j, A_k\}\} = 0, \qquad \epsilon_{ijk}\{p_i, \{p_j, \phi\}\} = 0.$$

Per quanto riguarda l'interpretazione, si noti che i risultati precedenti permettono di riscrivere le espressioni trovate nella forma vettoriale

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0.$$

In altri termini abbiamo riderivato le equazioni di Maxwell omogenee (identità di Bianchi del campo elettromagnetico).

Problema A.3

Dalla definizione di momento coniugato si ottiene immediatamente

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{1 + \sqrt{1 - q^2 \dot{q}^2}}{\dot{q}},$$

da cui risolvendo l'equazione algebrica per $\dot{q}$ si ricava

$$\dot{q} = \frac{2\,p}{p^2 + q^2}, \qquad 1 - q^2 \dot{q}^2 = \left(\frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}\right)^2.$$

L'Hamiltoniana si ricava calcolando

$$H = p\dot{q} - L = 1 + \ln \frac{p^2 + q^2}{2},$$

dove nel corso del calcolo la scelta del segno della radice si effettua imponendo la condizione di riottenere nel risultato finale l'equazione canonica $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$.

Dall'Hamiltoniana così ottenuta conseguono le equazioni del moto

$$\dot{q} = \frac{2\,p}{p^2 + q^2}, \qquad \dot{p} = -\frac{2\,q}{p^2 + q^2},$$

ma facendo uso del fatto che H è conservata consegue che anche $\alpha \equiv \frac{2}{p^2+q^2}$ è costante, e quindi le equazioni si riducono a

$$\dot{q} = \alpha p, \qquad \dot{p} = -\alpha q$$

e, poiché le soluzioni del problema generato dalla Lagrangiana ausiliaria L' soddisfano le relazioni $\dot{q}' = p'$ e $\dot{p}' = -q'$, le soluzioni del problema iniziale avranno la forma

$$q(t) = q'(\alpha t), \qquad p(t) = p'(\alpha t).$$