FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2004/2005
Secondo appello - Sessione invernale
Mercoledì 9 Febbraio 2005 - ore 15

SOLUZIONI

Problema R.1

a) Se il processo appare come la riflessione della particella di massa m_1 da una parete infinita, che assumeremo per convenienza disposta sul piano $z = 0$, allora per ipotesi dovrà valere

$$\mathbf{p}'_{1\|} = \mathbf{p}_{1\|}, \qquad p'_{1z} = -p_{1z},$$

dove il simbolo $\|$ indica le componenti dell'impulso che giacciono sul piano di riflessione. Di conseguenza vale per l'energia della particella la relazione $E'_1 = E_1$.

Applicando la conservazione dell'impulso totale risulta allora immediatamente

$$\mathbf{p}'_{2\|} = \mathbf{p}_{2\|},$$

mentre la conservazione dell'energia implica $E'_2 = E_2$. Di conseguenza il modulo di p'_{2z} deve coincidere con il modulo di p_{2z}. Ma la conservazione della componente dell'impulso ortogonale al piano comporta $p'_{2z} - p_{2z} = 2p_{1z}$ e quindi l'unica soluzione possibile è

$$p'_{2z} = -p_{2z} = p_{1z}.$$

b) Sostituendo il risultato precedente nella legge di conservazione si ricava anche immediatamente

$$p_{1z} + p_{2z} = p'_{1z} + p'_{2z} = 0.$$

c) In primo luogo si può tener conto di tutte le simmetrie di traslazione e di rotazione del sistema di riferimento, che corrispondono a 6 gradi di libertà cinematici.

È poi evidente che ogni trasformazione di Lorentz per cui la velocità del moto relativo $\mathbf{v}_\|$ giace sul piano di riflessione lascerà invariate le componenti trasverse dell'impulso e quindi le relazioni precedentemente derivate, mentre le componenti dell'impulso parallele al piano si trasformeranno, ma impulsi uguali andranno comunque in impulsi uguali, grazie all'identità tra le energie prima e dopo la collisione, e pertanto anche le corrispondenti relazioni resteranno inalterate.

In conclusione quindi ci saranno due ulteriori gradi di libertà cinematici, legati alle componenti indipendenti di $\mathbf{v}_\|$.

d) La variazione dell'impulso spaziale è data, per quanto sopra detto, dalla relazione

$$\Delta p_1 \equiv p'_{1z} - p_{1z} = 2p_{1z} = -2p_{2z} \equiv -\Delta p_2.$$

Il calcolo diretto, tenuto conto dell'uguaglianza delle energie prima e dopo l'urto, dà come risultato

$$t = -(\Delta p)^2.$$

e) Il riferimento del centro di massa è semplicemente quel particolare riferimento dell'insieme per cui vale

$$\mathbf{p}_{1c\|} + \mathbf{p}_{2c\|} = \mathbf{p}'_{1c\|} + \mathbf{p}'_{2c\|} = 0.$$

Esso si ottiene quindi a partire da un qualunque riferimento appartenente all'insieme effettuando la trasformazione di Lorentz per cui vale

$$\mathbf{v}_{\|} = \frac{\mathbf{p}_{1\|} + \mathbf{p}_{2\|}}{E_1 + E_2}$$

.

Poiché in tale riferimento, come sappiamo, vale

$$|\mathbf{p}_c| = \frac{1}{2}\sqrt{s}\sqrt{\left[1 - (\frac{m_1 + m_2}{\sqrt{s}})^2\right]\left[1 - (\frac{m_1 - m_2}{\sqrt{s}})^2\right]},$$

è immediato ricavare $|\mathbf{p}_{c\|}|$ in funzione di s e t dall'equazione $|\mathbf{p}_{c\|}| = \sqrt{\mathbf{p}_c^2 - p_z^2}$ ricordando la relazione già derivata tra p_z e t. Si noti anche la relazione $t = -(2|\mathbf{p}_c|\sin\frac{\theta_c}{2})^2$.

Problema R.2

Ricordiamo innanzitutto che la relazione $U^\mu U_\mu = c^2$ implica banalmente $U_\mu a^\mu = 0$. Derivando quest'ultima relazione rispetto al tempo proprio otteniamo:

$$U_\mu \frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} + a_\mu a^\mu = 0,$$

e di conseguenza subito, date le ipotesi,

$$U_\mu \frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} = -K,$$

dove si noti che per motivi fisici $K < 0$ e quindi $K' = -K > 0$.

Derivando rispetto al tempo proprio la relazione ottenuta si ottiene poi

$$\frac{dU^\mu}{d\tau}\frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} + U_\mu \frac{d^3 U^\mu}{d\tau^3} = 0.$$

Ma si noti che derivando rispetto al tempo proprio la relazione $a_\mu a^\mu = K$ si ottiene

$$a_\mu \frac{d^2 U^\mu}{d\tau^2} = 0,$$

e di conseguenza subito, sostituendo nella precedente

$$U_\mu \frac{d^3 U^\mu}{d\tau^3} = 0.$$

Nel caso generale in cui $\frac{d^n U_\mu}{d\tau^n}\frac{d^n U^\mu}{d\tau^n} = K_n$ la prova delle proposizioni indicate si può dare per induzione. Vale infatti immediatamente

$$\frac{d^n U^\mu}{d\tau^n}\frac{d^{n+1} U_\mu}{d\tau^{n+1}} = 0.$$

Verifichiamo a questo punto che se, per n dato e ogni $m \leq n$, vale

$$\frac{d^{n-m} U^\mu}{d\tau^{n-m}}\frac{d^{n+m} U_\mu}{d\tau^{n+m}} = (-1)^m K_n,$$

$$\frac{d^{n-m} U^\mu}{d\tau^{n-m}}\frac{d^{n+m+1} U_\mu}{d\tau^{n+m+1}} = 0,$$

relazioni che sono certamente vere per $n = 0$ ed $n = 1$, allora tali relazioni valgono anche con la sostituzione $n \to n+1$.

Infatti derivando la prima relazione si ottiene

$$\frac{d^{(n+1)-m} U^\mu}{d\tau^{(n+1)-m}}\frac{d^{(n+1)+(m-1)} U_\mu}{d\tau^{(n+1)+(m-1)}} + \frac{d^{(n+1)-(m+1)} U^\mu}{d\tau^{(n+1)-(m+1)}}\frac{d^{(n+1)+m} U_\mu}{d\tau^{(n+1)+m}} = 0,$$

che può essere risolta ricorsivamente con la condizione iniziale già nota per $m = 1$ ottenendo appunto

$$\frac{d^{(n+1)-(m+1)} U^\mu}{d\tau^{(n+1)-(m+1)}}\frac{d^{(n+1)+m} U_\mu}{d\tau^{(n+1)+m}} = 0.$$

Analogamente derivando la seconda relazione si ottiene

$$\frac{d^{(n+1)-m} U^\mu}{d\tau^{(n+1)-m}}\frac{d^{(n+1)+m} U_\mu}{d\tau^{(n+1)+m}} + \frac{d^{(n+1)-(m+1)} U^\mu}{d\tau^{(n+1)-(m+1)}}\frac{d^{(n+1)+(m+1)} U_\mu}{d\tau^{(n+1)+(m+1)}} = 0,$$

che risolta ricorsivamente con la condizione nota per $m = 0$ produce appunto la relazione

$$\frac{d^{(n+1)-m} U^\mu}{d\tau^{(n+1)-m}}\frac{d^{(n+1)+m} U_\mu}{d\tau^{(n+1)+m}} = (-1)^m K_{n+1}.$$

È del tutto banale verificare che il moto circolare uniforme soddisfa tutte le condizioni indicate, e vale in particolare in questo caso, posta u la velocità tangenziale, $\gamma = \gamma(u)$ ed R il raggio dell'orbita, per ogni $n > 0$:

$$K_n = -(\gamma\, u)^{2n+2} R^{-2n}.$$

Problema R.3

La condizione cinematica di moto circolare uniforme è quella dell'uguaglianza tra accelerazione centripeta $\frac{u^2}{R}$ e accelerazione gravitazionale, che nel caso Newtoniano è data da $\frac{GM}{R^2}$ per ogni corpo, a causa dell'equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale.

Questa relazione può essere vista anche come conseguenza della legge

$$F_\perp = m_0 \gamma a_\perp = \frac{E}{c^2} a_\perp,$$

per cui se la forza è proporzionale a $\frac{E}{c^2}$ (massa gravitazionale) allora l'accelerazione è indipendente da E.

Data questa premessa risulta subito per il problema in esame l'uguaglianza

$$\frac{c^2}{R} = \frac{2GM}{R^2},$$

da cui anche

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

(raggio di Schwarzschild).

Problema A.1

Adottando coordinate polari piane, si ottiene per tutti i moti orbitali dovuti a una forza centrale la relazione

$$r^2 \dot{\varphi} = \lambda,$$

dove λ è una costante (legata alla velocità areolare).

Vale inoltre la conservazione dell'energia, che si può scrivere

$$\frac{2E}{m} = \dot{r}^2 + \frac{\lambda^2}{r^2} - 2\frac{GM}{r},$$

dove si è posta M la massa del Sole.

Nel caso del moto parabolico è soddisfatta la condizione $E = 0$ mentre per il moto circolare uniforme della Terra vale

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{\lambda_T^2}{R^3} = \omega^2 R,$$

dove R è il raggio dell'orbita terrestre e ω la frequenza angolare del moto annuale della Terra.

Possiamo quindi esprimere la costante GM in termini del periodo terrestre T e di R, grazie alla relazione

$$GM = \omega^2 R^3 = (2\pi)^2 \frac{R^3}{T^2}.$$

Vale pertanto per la generica orbita parabolica

$$\dot{r}^2 + \frac{\lambda^2}{r^2} - 8\pi^2 \frac{R^3}{rT^2} = 0.$$

Notiamo ora che, posta ρ la minima distanza del corpo dal Sole, deve in quel punto annullarsi la velocità radiale, e quindi vale

$$\frac{\lambda^2}{\rho^2} = 2\frac{GM}{\rho} = 8\pi^2 \frac{R^3}{\rho T^2},$$

da cui, esprimendo λ in funzione di ρ, R e T risulta in generale

$$\dot{r}^2 + 8\pi^2 \frac{R^3}{T^2}\left[\frac{\rho}{r^2} - \frac{1}{r}\right] = 0,$$

e in conclusione

$$\dot{r} = 2\sqrt{2}\pi \frac{R^{\frac{3}{2}}}{T}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{\rho}{r^2}}.$$

Possiamo per comodità introdurre le variabili adimensionali $x = \frac{r}{R}$ e $\xi = \frac{\rho}{R}$, e scrivere

$$dt = \frac{x\,dx}{\sqrt{x - \xi}} \frac{T}{2\sqrt{2}\pi}.$$

Il tempo trascorso all'interno dell'orbita sarà quindi in generale

$$\Delta t = \sqrt{2}\frac{T}{2\pi}\int_\xi^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-\xi}} = \sqrt{2}\frac{T}{2\pi}\left[\frac{2}{3}(1-\xi)^{\frac{3}{2}} + 2\xi(1-\xi)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Questa quantità deve essere massimizzata, ad esempio al variare di ξ:

$$\frac{d\Delta t}{d\xi} = \sqrt{2}\frac{T}{2\pi}(1-\xi)^{-\frac{1}{2}}(1-2\xi) = 0,$$

che implica per il massimo il valore $\xi = \frac{1}{2}$.

Quindi la minima distanza raggiunta nel caso di massima permanenza all'interno dell'orbita terrestre è $\rho = \frac{1}{2}R$.

Sostituendo nell'espressione del tempo di permanenza si trova poi

$$\Delta t = \sqrt{2}\frac{T}{2\pi}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{4}{3}\frac{T}{2\pi} = \frac{2T}{3\pi}.$$

Notando poi che vale $r^2\dot{\varphi} = \lambda$ da cui

$$r^2\frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}} = \frac{r}{\sqrt{\frac{2GM}{\lambda^2}r - 1}},$$

si ottiene subito

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{\frac{r}{\rho} - 1}},$$

da cui integrando si ricava

$$\Delta\varphi = 4\tan^{-1}\sqrt{\frac{1}{\xi} - 1}$$

e posto $\xi = \frac{1}{2}$ risulta $\Delta\varphi = \pi$.

Il tratto di orbita terrestre intersecato è una semicirconferenza, e il risultato è consistente con le proprietà geometriche della parabola di fuoco $\rho = \frac{R}{2}$.

Problema A.2

La Lagrangiana è data dal termine cinetico e dalla somma dei potenziali armonici, ovvero

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} K_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2.$$

Ma notiamo che l'energia potenziale può essere riscritta nella forma

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} K_i(\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i^2) = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{N} K_i)\mathbf{r}^2 - ((\sum_{i=1}^{N} K_i\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{r} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} K_i\mathbf{r}_i^2,$$

da cui con una semplice manipolazione, posto

$$\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} K_i\mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} K_i},$$

si ottiene per l'energia potenziale la forma

$$\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{N} K_i)\left[\mathbf{r} - \mathbf{R}\right]^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} K_i\mathbf{r}_i^2 - \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{N} K_i)\mathbf{R}^2.$$

Poiché gli ultimi due termini sono costanti, e valgono esattamente

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} K_i\left[\mathbf{r}_i - \mathbf{R}\right]^2,$$

la Lagrangiana è equivalente a quella di un singolo oscillatore attratto verso la posizione di equilibrio $\mathbf{R}$, nella quale si ha l'annullamento della somma vettoriale delle forze:

$$\sum_{i=1}^{N} K_i(\mathbf{R} - \mathbf{r}_i) = 0.$$

La costante elastica equivalente è la somma delle costanti $K \equiv \sum_{i=1}^{N} K_i$, e il moto è costituito da ellissi di ampiezza arbitraria con centro in $\mathbf{R}$ percorse con frequenza $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

Dal calcolo diretto risulta

$$q = -\frac{\partial F_4}{\partial p} = \frac{L}{\sqrt{p^2 - 2mP}},$$

$$Q = \frac{\partial F_4}{\partial P} = \frac{p\,L}{2P\sqrt{p^2 - 2mP}}.$$

Risolvendo algebricamente si ricava

$$Q = \frac{mpq^3}{p^2q^2 - L^2}, \qquad\qquad P = \frac{p^2}{2m} - \frac{L^2}{2mq^2}.$$

Le trasformazioni inverse sono quindi:

$$q = \sqrt{\frac{4Q^2P^2 - L^2}{2mP}}, \qquad\qquad p = 2PQ\sqrt{\frac{2mP}{4Q^2P^2 - L^2}}.$$

Di conseguenza le nuove equazioni canoniche sono

$$\dot{P} = \frac{p}{m}\dot{p} + \frac{L^2}{mq^3}\dot{q} = 0,$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{p^2q^2 - L^2}\left(mq^3\dot{p} + 3mq^2p\dot{q} - \frac{mq^3p}{p^2q^2 - L^2}(2q^2p\dot{p} + 2qp^2\dot{q})\right) = 1,$$

e sono risolte banalmente da

$$Q = t - t_0, \qquad\qquad P = E,$$

dove E è una costante del moto.

Per immediata sostituzione si trova la soluzione delle equazioni del moto nella forma

$$q(t) = \sqrt{\frac{4E^2(t-t_0)^2 - L^2}{2mE}}, \qquad\qquad p(t) = 2E(t-t_0)\sqrt{\frac{2mE}{4E^2(t-t_0)^2 - L^2}}.$$