FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2005/2006
Secondo appello - Sessione invernale
Venerdì 3 Febbraio 2006 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

Poniamo per comodità $c = 1$.

1) La relazione invariante che permette il calcolo della massa totale M del sistema è semplicemente

$$M^2 = (p_1 + p_2)^2,$$

dove p_i sono i quadrivettori quadrimpulso dei due corpi, e la notazione adottata indica il modulo quadro della loro somma. Nel caso di moto collineare si può usare la rappresentazione $p_i = (m_i \cosh\theta_i, m_i \sinh\theta_i)$, da cui per sostituzione diretta risulta

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cosh(\theta_1 - \theta_2)}.$$

2) La relazione invariante che esprime il modulo dell'impulso dei due corpi nel riferimento del centro di massa è

$$4M^2 |\mathbf{p}_c|^2 = \left[M^2 - (m_1 + m_2)^2\right]\left[M^2 - (m_1 - m_2)^2\right].$$

Risulta quindi per sostituzione diretta del risultato precedente

$$|\mathbf{p}_c| = \frac{m_1 m_2}{M} \left|\sinh(\theta_1 - \theta_2)\right|.$$

3) L'espressione invariante della velocità relativa è

$$v_{rel} = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{(p_1 p_2)^2}},$$

dove $(p_1 p_2)$ indica il prodotto scalare invariante dei quadrivettori.

Dal calcolo risulta

$$v_{rel} = \tanh(\theta_1 - \theta_2),$$

che si interpreta immediatamente riconoscendo in $\theta_1 - \theta_2$ la rapidità relativa.

4) Ricordiamo le relazioni invarianti

$$\varepsilon_{1\ell} = \frac{(p_1 p_2)}{m_2}, \qquad\qquad p_{1\ell}^2 = \varepsilon_{1\ell}^2 - m_1^2,$$

dalle quali si ricava immediatamente

$$\varepsilon_{1\ell} = m_1 \cosh(\theta_1 - \theta_2), \qquad\qquad p_{1\ell} = m_1 \sinh(\theta_1 - \theta_2).$$

5) Tutte le quantità dipendono soltanto dalla rapidità relativa $\theta_1 - \theta_2$, ma le rapidità sono additive per trasformazioni di Lorentz collineari, e quindi la loro diffeenza è invariante per tali trasformazioni. Tutte le quantità invarianti devono quindi dipendere da questa sola variabile dinamica.

Problema R.2

1) Il tempo di invio del segnale ricevuto al tempo T è determinato dalla relazione $u\,t = c(T - t)$. Risulta quindi

$$t = \frac{T}{1 + \frac{u}{c}}, \qquad\qquad x = u\,t = \frac{u\,T}{1 + \frac{u}{c}}.$$

2) Il tempo proprio della sorgente al momento dell'invio del segnale è semplicemente il tempo del riferimento della sorgente. Basta quindi effettuare una trasformazione di Lorentz con parametro di velocità u, ottenendo

$$x' = 0, \qquad\qquad \tau \equiv t' = \gamma(1 - \frac{u}{c})T = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,T.$$

3) Possiamo risolvere per u il risultato precedentemente ottenuto $x = x(u, T)$, ricavando

$$u = \frac{c\,x}{c\,T - x},$$

da cui per sostituzione otteniamo

$$\tau = T\sqrt{1 - \frac{2\,x}{c\,T}}.$$

La singolarità per $x = c\,T/2$ indica il fatto che la massima distanza osservabile al tempo T ("orizzonte") è quella che può essere stata raggiunta al tempo $T/2$ (tempo di invio del segnale) da un frammento che viaggia a velocità asintoticamente vicina a c.

Problema R.3

1) Conviene scrivere l'equazione del moto utilizzando la variabile rapidità e notando che, posto $\beta = \tanh\theta$, vale

$$\frac{d(\beta\gamma)}{dt} = \cosh\theta \frac{d\theta}{dt},$$

per cui risulta

$$mc\frac{d(\beta\gamma)}{dt} = mc\cosh\theta\frac{d\theta}{dt} = F = \frac{F_0}{\sinh\theta}.$$

Introducendo la costante $K \equiv 2F_0/mc$ si ottiene quindi l'equazione

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{2\sinh\theta\cosh\theta},$$

che pu essere integrata senza difficoltà. Se scegliamo la costante di integrazione in modo tale da avere $\theta(0) = 0$ otteniamo

$$\sinh^2\theta = Kt.$$

Si ricava quindi

$$\sinh\theta = \sqrt{Kt}, \qquad \cosh\theta = \sqrt{1 + Kt},$$

e finalmente ricordando la definizione di θ si ricava

$$\beta = \tanh\theta = \sqrt{\frac{Kt}{1 + Kt}}.$$

2) Possiamo ricavare il tempo proprio per integrazione diretta, notando che

$$d\tau = \int \sqrt{1 - \beta^2}\, dt = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + Kt}}.$$

Con la condizione iniziale assegnata risulta quindi immediatamente

$$\tau = \frac{2}{K}\left[\sqrt{1 + Kt} - 1\right].$$

3) Il calcolo della derivata della rapidità rispetto al tempo proprio si effettua semplicemente ricordando che questa quantità coincide con il valore dell'accelerazione (longitudinale) nel riferimento di quiete istantanea (diviso c), e tale valore a sua volta si ottiene da quello della forza (longitudinale) diviso per quello della massa (e per c). Risulta quindi

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \cosh\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{2\sinh\theta}.$$

Problema A.1

1) Dette x e y le coordinate cartesiane della massa m valgono le relazioni

$$x = l\,\sin\theta, \qquad\qquad y = z - l\,\cos\theta.$$

È quindi immediato ricavare la Lagrangiana del sistema, che prende la forma

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m\,l^2\dot{\theta}^2 + m\,l\,\sin\theta\dot{\theta}\dot{z} - (M+m)g\,z + m\,g\,l\,\cos\theta.$$

2) Usando il formalismo lagrangiano definiamo i momenti coniugati

$$p_z = (M+m)\dot{z} + m\,l\,\sin\theta\,\dot{\theta},$$

$$p_\theta = m\,l^2\dot{\theta} + m\,l\,\sin\theta\,\dot{z},$$

e otteniamo le equazioni del moto nella forma

$$\dot{p}_z = -(M+m)g,$$

$$\dot{p}_\theta = m\,l\,\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{z} - m\,g\,l\,\sin\theta.$$

La prima equazione può essere ulteriormente esplicitata riscrivendola nella forma

$$\ddot{z} - \frac{m}{M+m}l\,\frac{d^2}{dt^2}(\cos\theta) = -g.$$

Si noti che quest'equazione è integrabile per la variabile $z - \frac{m}{M+m}l\,\cos\theta$ (equazione del moto uniformemente accelerato per la coordinata verticale del centro di massa), e si noti anche che da essa si può ricavare $\dot{z}$ come funzione di θ e delle sue derivate.

La seconda equazione può essere a sua volta esplicitata e prende la forma

$$m\,l^2\ddot{\theta} + m\,l\,\sin\theta\,\ddot{z} = -m\,g\,l\,\sin\theta.$$

Se ora sostituiamo la prima equazione nella seconda otteniamo semplicemente

$$m\,l^2\ddot{\theta} - \frac{m^2 l^2}{M+m}\sin\theta\frac{d}{dt}(\sin\theta\,\dot{\theta}) = 0,$$

dove la dipendenza da g si è completamente cancellata.

3) Basta moltiplicare per $\dot{\theta}$ l'espressione precedentemente ottenuta e riconoscere che il risultato è una derivata totale rispetto al tempo. Possiamo quindi introdurre un integrale primo indipendente da z, che rappresenta l'energia del sistema nel riferimento del centro di massa

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m\,l^2\dot{\theta}^2\left(1 - \frac{m}{M+m}\sin^2\theta\right).$$

Quest'espressione ha la stessa forma che avrebbe in assenza di gravità.

Problema A.2

1) Per dimostrare la canonicità della trasformazione calcoliamo le parentesi di Poisson fondamentali. A tal fine ricaviamo:

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{1}{2\, q^{\frac{1}{2}}} \frac{\cos p}{1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{q^{\frac{1}{2}} \sin p}{1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p},$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = 2\, \sin p\, \cos p + \frac{\sin p}{q^{\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{\partial P}{\partial p} = -2\, q\, \sin^2 p + 2\, q^{\frac{1}{2}} \cos p\, (1 + q^{\frac{1}{2}} \cos p).$$

A questo punto il calcolo della parentesi di Poisson è banale e il risultato è

$$\{Q.P\}_{q,p} = \cos^2 p + \sin^2 p = 1.$$

2) Per ricostruire la funzione generatrice $F_3(p, Q)$ dobbiamo innanzitutto esprimere q e P in termini di p e Q. Semplici calcoli conducono al risultato:

$$q = \frac{(e^Q - 1)^2}{\cos^2 p}, \qquad P = 2\, e^Q (e^Q - 1) \frac{\sin p}{\cos p}.$$

Si tratta ora di integrare le equazioni

$$q(Q, p) = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \qquad P(Q, p) = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}.$$

È immediato convincersi che la soluzione è

$$F_3(Q, p) = -(e^Q - 1)^2 \tan p.$$

Problema A.3

1) La Lagrangiana del sistema è esprimibile nella forma

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) + (\sum_i m_i \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{g}.$$

2) Nel passaggio al riferimento accelerato valgono le relazioni

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_0 - \mathbf{V}_0 t - \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2,$$

dove $\mathbf{R}_0$ e $\mathbf{V}_0$ sono condizioni iniziali arbitrarie per il moto del riferimento.

Notiamo quindi che vale

$$\dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{V}_0 - \mathbf{g} t,$$

e vale anche $\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$.

Sostituendo nella Lagrangiana otteniamo quindi

$$L' = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'^2_i + (\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i)(\mathbf{V}_0 + \mathbf{g} t) + \frac{1}{2} (\sum_i m_i)(\mathbf{V}_0 + \mathbf{g} t)^2 - \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij}(|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j|)$$

$$+ (\sum_i m_i \mathbf{r}'_i) \cdot \mathbf{g} + (\sum_i m_i)(\mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2) \cdot \mathbf{g}.$$

3) Notiamo ora che L' si può scrivere come somma di tre termini:

$$L' = L_{eff} + \Delta L_1 + \Delta L_2,$$

dove

$$L_{eff} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}'}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{ij} V_{ij}(|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j|),$$

$$\Delta L_1 = (\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i)(\mathbf{V}_0 + \mathbf{g}t) + (\sum_i m_i \mathbf{r}'_i) \cdot \mathbf{g}.$$

$$\Delta L_2 = \frac{1}{2}(\sum_i m_i)\big[\frac{1}{2}\mathbf{V}_0^2 + \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_0 + 2\mathbf{g} \cdot \mathbf{V}_0 t + \mathbf{g}^2 t^2\big].$$

Il primo termine è la Lagrangiana che descriverebbe il sistema in un riferimento inerziale se la gravità fosse assente. Il terzo termine non dipende dalle variabili dinamiche, che sono $\mathbf{r}'_i$ e $\dot{\mathbf{r}}'_i$, ed è pertanto irrilevante (che può comunque essere scritto in forma di derivata totale rispetto al tempo). Quanto al secondo termine, notiamo che vale

$$\Delta L_1 = \frac{d}{dt}\big[(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i)(\mathbf{V}_0 + \mathbf{g}t)\big].$$

Pertanto ΔL_1 è una derivata totale rispetto al tempo e in quanto tale non modifica le equazioni del moto.