FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2006/2007
Secondo appello - Sessione invernale
Venerdì 2 Febbraio 2007 - ore 15

SOLUZIONI

Problema R.1

1) Il problema può essere risolto più facilmente passando alla variabile rapidità θ, tale che $v_i = c\,\tanh\theta_i$, e sfruttando l'additività di tale variabile nel caso di trasformazioni di Lorentz in una dimensione.

Posto $w_0 = c\,\tanh\theta_0$ risulta allora immediatamente per la rapidità del segnale inviato da 1 a 2 nel riferimento dell'osservatore:

$$\theta_{12} = \theta_0 + \theta_1,$$

mentre il segnale di risposta viaggia con rapidità

$$\theta_{21} = \theta_2 - \theta_0.$$

Convertendo questi risultati ai riferimenti nei quali essi vengono ricevuti risulta quindi per le rapidità osservate al momento della ricezione

$$\theta'_{12} = \theta_{12} - \theta_2 = \theta_0 + \theta_1 - \theta_2,$$

$$\theta'_{21} = \theta_{21} - \theta_1 = \theta_2 - \theta_0 - \theta_1.$$

La risposta alla domanda è quindi

$$v'_{12} = -v'_{21} = c\,\tanh(\theta_0 + \theta_1 - \theta_2),$$

che può essere scritta anche esplicitamente nella forma

$$v'_{12} = \frac{w_0 + v_1 - v_2 - \frac{1}{c^2}(v_1 v_2\, w_0)}{1 + \frac{1}{c^2}(v_1 w_0 - v_2 w_0 - v_1 v_2)}.$$

2) Sempre facendo uso delle variabili di rapidità, il riferimento nel quale le astronavi appaiono muoversi con velocità uguali e opposte si muove con rapidità φ tale che $\theta_1 - \varphi = -(\theta_2 - \varphi)$, per cui

$$\varphi = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2),$$

da cui si ricava immediatamente, per quanto riguarda la velocità di propagazione dei segnali in quel riferimento:

$$\bar{\theta}_{12} = \theta_{12} - \varphi = \theta_0 + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2),$$

$$\bar{\theta}_{21} = \theta_{21} - \varphi = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) - \theta_0.$$

Di conseguenza i valori delle velocità si ricavano dalla relazione

$$\bar{v}_{12} = -\bar{v}_{21} = c\,\tanh\big[\theta_0 + \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\big] = \frac{w_0 + c\,\tanh\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)}{1 + \frac{w_0}{c}\tanh\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Ricordiamo che vale anche

$$\tanh\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\sqrt{\frac{c+v_1}{c-v_1}}\sqrt{\frac{c-v_2}{c+v_2}} - 1}{\sqrt{\frac{c+v_1}{c-v_1}}\sqrt{\frac{c-v_2}{c+v_2}} + 1}.$$

Problema R.2

1) Posto $c = 1$, dalle leggi di conservazione di energia e impulso discendono immediatamente per il problema in esame le relazioni

$$\varepsilon_1 + m_2 = \varepsilon_1' + \varepsilon_2',$$

$$p_1 = p_2' \cos\theta,$$

$$p_1' = p_2' \sin\theta.$$

da cui con semplici passaggi algebrici, risolvendo rispetto a ε_1', ε_2' e θ, è possibile ricavare

$$\varepsilon_1' = m_2 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{\varepsilon_1 + m_2}, \qquad \varepsilon_2' = \varepsilon_1 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{\varepsilon_1 + m_2},$$

$$\tan\theta = \frac{p_1'}{p_1} = \frac{\sqrt{m_2^2 - m_1^2}}{\varepsilon_1 + m_2}.$$

2) Dalla condizione $\varepsilon_1' \geq m_1$ e dai risultati precedenti risulta il vincolo

$$(m_2 - m_1)(\varepsilon_1 - m_1) \geq 0,$$

che, essendo $\varepsilon_1 \geq m_1$, può essere soddisfatto solo se

$$m_2 - m_1 \geq 0.$$

3) La risposta, come si è visto, si ricava dalla risposta alla domanda 1):

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{m_2^2 - m_1^2}}{\varepsilon_1 + m_2}.$$

Problema A.1

1) Introduciamo i seguenti vettori fissi, tutti di lunghezza l_0:

$$\mathbf{r}_1 = (l_0, 0, 0), \qquad \mathbf{r}_2 = (0, l_0, 0), \qquad \mathbf{r}_3 = -\mathbf{r}_1, \qquad \mathbf{r}_4 = -\mathbf{r}_2,$$

con la proprietà che $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 = 0$, per cui la posizione di equilibrio si trova nell'origine.

La Lagrangiana può essere scritta in termini della coordinata generalizzata $\mathbf{r}$, che è un vettore rappresentante lo scostamento dalla posizione di equilibrio. La forma della Lagrangiana esatta è allora

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{2}K\Big[(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - l_0)^2 + (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| - l_0)^2 + (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3| - l_0)^2 + (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_4| - l_0)^2\Big].$$

2) Per determinare le piccole oscillazioni occorre sviluppare l'espressione precedente nelle potenze di $\mathbf{r}$, trovando che vale

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| \approx l_0\big(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i}{l_0^2}\big),$$

per cui $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| - l_0 \approx -\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i}{l_0}$, che è già una quantità del primo ordine. Vale pertanto

$$L \approx \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{2}K\Big[\big(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1}{l_0}\big)^2 + \big(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_2}{l_0}\big)^2 + \big(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_3}{l_0}\big)^2 + \big(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_4}{l_0}\big)^2\Big].$$

Sostituendo le espressioni esplicite dei vettori $\mathbf{r}_i$ è però facile mostrare che vale

$$\sum_i \big(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i}{l_0}\big)^2 = 2(x^2 + y^2),$$

dove x e y sono le componenti di $\mathbf{r}$ nel piano su cui giacciono i punti di sospensione delle molle.

In conclusione si ricava per le piccole oscillazioni la Lagrangiana

$$L \approx \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - K(x^2 + y^2).$$

Due frequenze proprie sono quindi tra loro uguali e valgono

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{2\,K}{m}}.$$

Poiché le due frequenze sono uguali ogni coppia di assi ortogonali giacenti nel piano (x, y) e passanti per l'origine individua le direzioni di due modi propri.

Nella direzione z ortogonale al piano la frequenza propria è $\omega_3 = 0$, e quindi esiste un modo zero (all'ordine più basso nello sviluppo del potenziale in serie di potenze di z) diretto lungo z.

Problema A.2

La canonicità della trasformazione si verifica controllando l'invarianza delle parentesi di Poisson fondamentali. Notando che vale

$$\frac{\partial q}{\partial Q} = \frac{1}{2} Q^{-\frac{1}{2}} e^{-P}, \qquad \frac{\partial q}{\partial P} = -Q^{\frac{1}{2}} e^{-P},$$

$$\frac{\partial p}{\partial Q} = \frac{1}{2} Q^{-\frac{1}{2}} e^{P}, \qquad \frac{\partial p}{\partial P} = Q^{\frac{1}{2}} e^{P},$$

è immediato verificare che

$$\{q,\, p\}_{Q,P} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Per ricavare la funzione generatrice F_1 occorre esprimere p e P in funzione di q e Q, ottenendo le relazioni

$$p = \frac{Q}{q}, \qquad P = \frac{1}{2} \ln Q - \ln q.$$

Dalle relazioni

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = \frac{Q}{q}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial Q} = \ln q - \frac{1}{2} \ln Q$$

si ricava quindi facilmente

$$F_1 = \frac{1}{2}(Q - Q\, \ln Q) + Q\, \ln q.$$

Per ricavare F_3 si può effettuare una trasformazione di Legendre, scrivendo $F_3 = F_1 - p\,q$ e ricordando che $q = \frac{Q}{p}$, per cui risulta

$$F_3 = \frac{1}{2}(Q\, \ln Q - Q) - Q\, \ln p.$$

Si può verificare che sono soddisfatte le relazioni

$$-\frac{\partial F_3}{\partial p} = \frac{Q}{p} = q, \qquad -\frac{\partial F_3}{\partial Q} = \ln p - \frac{1}{2} \ln Q = P.$$