FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2007/2008
Secondo appello - Sessione invernale
Venerdì 1 Febbraio 2008 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

1) Notiamo che derivando la relazione $U_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau}$ si ottiene

$$\frac{dU_\mu}{d\tau}\frac{dU^\mu}{d\tau} + U_\mu \frac{d^2U^\mu}{d\tau^2} = 0,$$

e derivando ulteriormente si ottiene

$$3\frac{dU_\mu}{d\tau}\frac{d^2U^\mu}{d\tau^2} + U_\mu \frac{d^3U^\mu}{d\tau^3} = 0,$$

da cui per le ipotesi del problema disulta

$$\frac{dU_\mu}{d\tau}\frac{d^2U^\mu}{d\tau^2} = 0, \qquad \frac{dU_\mu}{d\tau}\frac{dU^\mu}{d\tau} = -a^2,$$

dove a^2 è il modulo quadro (costante) dell'accelerazione propria.

2) Integrando l'equazione $\frac{d^3U^\mu}{d\tau^3} = 0$ si ottiene in generale

$$U^\mu = U_0^\mu + A^\mu \tau + \frac{1}{2}B^\mu \tau^2,$$

dove U_0^μ, A^μ e B^μ sono quadrivettori costanti, e vale quindi anche

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = A^\mu + B^\mu \tau.$$

Imponendo i vincoli che risultano dalla costanza della norma di U^μ e posto $c = 1$ si ricavano facilmente le condizioni

$$U_0^\mu U_{0\mu} = 0, \qquad U_0^\mu A_\mu = 0, \qquad U_0^\mu B_\mu = -A^\mu A_\mu,$$
$$A^\mu b_\mu = 0, \qquad B^\mu B_\mu = 0.$$

Dalla scelta di adottare come riferimento quello di quiete istantanea all'istante $\tau = 0$ discende poi subito la relazione $U_0^\mu = (1, \mathbf{0})$.

Si possono a questo punto risolvere tutti i vincoli sopra elencati, senza alcuna perdita di generalità, scrivendo

$$A^\mu = (0, \mathbf{a}), \qquad |\mathbf{a}| = a,$$
$$B^\mu = (|\mathbf{b}|, \mathbf{b}), \qquad |\mathbf{b}| = a^2,$$

dove $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono due vettori costanti che, oltre le condizioni sul loro modulo sopra indicate, devono anche risultare tra loro ortogonali: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Il risultato dipende quindi, nel caso più generale, soltanto da due vettori costanti tra loro ortogonali, che individuano un piano sul quale si svolge il moto.

Problema R.2

1) Tenendo conto dei risultati ottenuti nella risoluzione del problema precedente, possiamo scrivere in forma parametrica la legge oraria del moto con la condizione iniziale $X^\mu(0) = 0$, ottenendo

$$X^\mu(\tau) = U_0^\mu \tau + \frac{1}{2} A^\mu \tau^2 + \frac{1}{6} B^\mu \tau^3,$$

e di conseguenza possiamo scrivere in componenti

$$X^\mu(\tau) = \left[\tau + \frac{1}{6} a^2 \tau^3, \, \frac{1}{2} \mathbf{a} \tau^2 + \frac{1}{6} \mathbf{b} \tau^3\right].$$

Scegliendo quindi opportunamente gli assi spaziali, e sfruttando l'ortogonalità tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ e le informazioni sul loro modulo, possiamo scrivere

$$a\,t = a\,\tau + \frac{1}{6}(a\,\tau)^3,$$

$$a\,x = \frac{1}{2}(a\,\tau)^2,$$

$$a\,y = \frac{1}{6}(a\,\tau)^3.$$

2) La traiettoria sul piano (xy) si trova eliminando nelle equazioni precedenti τ in favore di x, e ottenendo quindi $a\,\tau = \pm\sqrt{2\,a\,x}$ da cui finalmente la traiettoria

$$a\,y = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}(a\,x)^{\frac{3}{2}}.$$

Problema A.1

1) la Lagrangiana è semplicemente

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} A (bx)^{2n}.$$

L'equazione del moto si ricava immediatamente e vale

$$m\ddot{x} = -n\,A\,b(bx)^{2n-1}.$$

Si possono avre piccole oscillazioni intorno all'unica posizione di equilinbrio, che è $x = 0$, solo quando la forza è lineare in un intorno, e quindi soltanto nel caso $n = 1$ (oscillatore armonico).

2) La conservazione dell'energia implica

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} A (bx)^{2n} = E,$$

e pertanto i punti di inversione x_0, in cui $\dot{x} = 0$, sono le soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{2}A(bx_0)^{2n} = E,$$

ovvero

$$x_0 = \pm\frac{1}{b}\left(\frac{2\,E}{A}\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

3) Il periodo T è pari a quattro volte il tempo impiegato dalla particella per andare dall'origine al punto d'inversione. Dalla conservazione dell'energia, sfruttando la definizione di x_0, si ottiene

$$\dot{x}^2 = \frac{A}{m}\left[(bx_0)^{2n} - (bx)^{2n}\right],$$

da cui integrando

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{m}{A}}\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{(bx_0)^{2n} - (bx)^{2n}}}.$$

Introduciamo la variabile d'integrazione $t = x/x_0$ e scriviamo quindi

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{m}{A}}\frac{x_0}{(bx_0)^n}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1 - t^{2n}}},$$

da cui in conclusione

$$T = \frac{4\,x_0}{(bx_0)^n}\sqrt{\frac{m}{A}}2^{\frac{1}{n}}\frac{\Gamma^2(1+\frac{1}{2n})}{\Gamma(1+\frac{1}{n})}.$$

Reintroducendo poi la dipendenza esplicita dall'energia possiamo scrivere

$$T = \frac{1}{b}2^{\frac{3}{2}(1+\frac{1}{n})}\frac{E^{\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-1)}}{A^{\frac{1}{2n}}}\frac{\Gamma^2(1+\frac{1}{2n})}{\Gamma(1+\frac{1}{n})}.$$

4) Nel limite $n \to \infty$ risulta

$$T \to \frac{4}{b}\sqrt{\frac{m}{2E}}.$$

Notiamo che $\sqrt{\frac{m}{2E}} = \frac{1}{v_0}$, dove v_0 è la velocità al momento del passaggio all'origine, mentre $4/b$ è il cammino totale percorso in un periodo in quanto la posizione dei punti di inversione nel linite $n \to \infty$ è $1/b$.

Il potenziale in questo limite ha lo stesso effetto fisico di una scatola di larghezza $2/b$ dentro la quale la particella si muove liberamente.

Problema A.2

1) Esplicitando la dipendenza di D e di K dalle variabili dinamiche e ricordando che $\dot{H} = 0$ si ottiene

$$\dot{D} = H - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}},$$

$$\dot{K} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - m\,\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} - 2\,t\,\dot{D},$$

mentre le equazioni del moto hamiltoniane implicano

$$\dot{\mathbf{p}} = C\frac{\mathbf{r}}{r^4}, \qquad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m},$$

da cui segue per sostituzione diretta

$$\dot{D} = H - \frac{1}{2}\frac{C}{r^2} - \frac{1}{2}\frac{\mathbf{p}^2}{m} = 0,$$

$$\dot{K} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - 2\,t\,\dot{D} = 0.$$

La conservazione di D e di K è quindi in questo caso una conseguenza delle equazioni del moto.

2) Il calcolo delle parentesi di Poisson si potrebbe effettuare applicando la definizione generale $\{f,\, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$.

Conviene tuttavia sfruttare il fatto che vale in generale la relazione $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f,\, H\}$ e che D e K sono conservate.

Risulta quindi

$$\{H,\, D\} = \frac{\partial D}{\partial t} = H,$$

$$\{H,\, K\} = \frac{\partial K}{\partial t} = -2\,D.$$

Dal calcolo diretto si ottiene invece:

$$\{D,\, K\} = -t^2\frac{\mathbf{p}^2}{2\,m} - t^2\frac{C}{2\,r^2} + t\,\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2}m\,r^2 = K.$$