FISICA a III - Prova scritta - A.A. 2008/2009
Secondo appello - Sessione invernale
Mercoledì 4 Febbraio 2009 - ore 9

SOLUZIONI

Problema R.1

La relazione valida in generale per l'effetto Compton di fotoni su elettroni è

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta),$$

dove $\lambda_c = h/m_e c$ è la lunghezza d'onda Compton, che per l'elettrone vale $2.42 \times 10^{-10} cm$.

Pertanto la massima variazione di lunghezza d'onda (e quindi la massima perdita di energia del fotone) si ha quando $\theta = \pi$, e risulta in generale

$$\lambda' - \lambda \leq 2\,\lambda_c.$$

Posto poi $\Delta M = m_n - m_p - m_e$ (e notando che vale $\Delta M \approx 1.531\, m_e$), è possibile definire l'energia di soglia per la produzione di neutroni nella collisione di elettroni in moto con protoni fermi:

$$E_{th} - m_e c^2 = \Delta M\, c^2 \Big(1 + \frac{m_e}{m_p} + \frac{\Delta M}{2\, m_p}\Big).$$

e notando che vale $m_e/m_p \approx 5.45 \times 10^{-4}$ risulta numericamente $E_{th} - m_e c^2 \approx 1.532\, m_e c^2$.

L'energia acquisita dall'elettrone coincide con l'eneriga perduta dal fotone, e vale quindi la relazione

$$\nu - \nu' = \frac{E_e - m_e c^2}{h}.$$

Definiamo per comodità una frequenza ausiliaria

$$\nu_t = \frac{E_{th} - m_e c^2}{h},$$

il cui valore numerico è $\nu_t \approx 1.532\, \frac{c}{\lambda_c}$, e notiamo che per la produzione di neutroni deve valere

$$\nu - \nu' \geq \nu_t.$$

La regione di interesse nel piano 9ν, ν' è pertanto quella che si trova a destra della retta $\nu' = \nu - \nu_t$ e al di sopra dell'iperbole individuata dal caso limite della relazione Compton:

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + 2\frac{\lambda_c \nu}{c}}.$$

La condizione di soglia corrisponde quindi all'intersezione delle due curve, quando

$$\nu - \nu_t = \frac{\nu}{1 + 2\frac{\lambda_c \nu}{c}}.$$

Si tratta quindi di risolvere l'equazione

$$2\frac{\lambda_c}{c}(\nu^2 - \nu_t \nu) - \nu_t = 0.$$

Introducendo le variabili adimensionali

$$x = \frac{\lambda_c \nu}{c}, \qquad \alpha = \frac{\lambda_c \nu_t}{c} \approx 1.532$$

l'equazione si riduce a

$$2\,x^2 - 2\,\alpha\,x - \alpha = 0,$$

con l'unica soluzione reale positiva

$$x = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\,\alpha}}{2},$$

il cui valore numerico è nel nostro caso $x \approx 1.929$

In conclusione i valori di soglia sono quindi

$$\nu \approx 1.929\,\frac{c}{\lambda_c}, \qquad \nu' \approx 0.397\,\frac{c}{\lambda_c}.$$

Problema R.2

A partire dalla funzione $x(\tau)$ è possibile calcolare la quantità

$$\gamma(\tau)u(\tau) \equiv \frac{u(\tau)}{\sqrt{1 - \frac{u^2(\tau)}{c^2}}} = \frac{dx}{d\tau} \equiv x'.$$

Vale quindi, risolvendo per $u(\tau)$:

$$u(\tau) = \frac{x'}{\sqrt{1 + \frac{x'^2}{c^2}}},$$

da cui anche

$$\gamma(\tau) = \sqrt{1 + \frac{x'^2}{c^2}}.$$

Poiché vale la relazione $\frac{dt}{d\tau} = \gamma(\tau)$ ne segue anche

$$t = \int \gamma(\tau) d\tau = \int \sqrt{1 + \frac{x'^2}{c^2}}\, d\tau.$$

Problema A.1

Per la prima e la seconda domanda si tratta di una semplice variante dell'esercizio A.2.22.

1) Possiamo parametrizzare il moto mediante la coordinata orizzontale x del centro della guida e la coordinata angolare θ che individua la posizione di m lungo la guida stessa.

le coordinate cartesiane della posizione di m sono quindi:

$$\xi = x + R\sin\theta, \qquad \eta = R(1-\cos\theta).$$

La Lagrangiana del sistema è pertanto

$$L = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + mR\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{x} + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta.$$

2) Le equazioni del moto sono quindi

$$\frac{d}{dt}\left[(m+M)\dot{x} + mR\cos\theta\,\dot{\theta}\right] = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left[mR\cos\theta\,\dot{x} + mR^2\dot{\theta}\right] = -mR\sin\theta\,\dot{\theta}\,\dot{x} - mgR\sin\theta.$$

Notiamo che la prima equazione è semplicemente la legge di conservazione della componente orizzontale della quantità di moto totale p_x. È quindi possibile sostituire la legge di conservazione nella seconda equazione del moto, ottenendo un'equazione per la sola vatiabile θ:

$$\left(1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\theta\right)\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\sin\theta - \frac{m}{m+M}\sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\theta}^2,$$

e come prevedibile per mtotivi generali (invarianza galileiana) l'equazione per θ non dipende dal moto del centro di massa e dal valore di p_x.

3) La posizione di equilibrio corrisponde a $\theta = 0$, e nel caso di piccoli spostamenti dall'equilibrio l'equazione del moto sopra ricavata si riduce a

$$\frac{M}{m+M}\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\theta,$$

per cui la massa m oscilla (armonicamente) intorno alla posizione di equilibrio con frequenza

$$\omega = \sqrt{\frac{m+M}{M}\frac{g}{R}}.$$

Problema A.2

Si tratta di un caso particolare dell'esercizio B.2.34 (dove si è posto $l+1 = 1/\alpha$).

1) È immediato ricavare

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = q^{\alpha-1}P^{\alpha}, \qquad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = q^{\alpha}P^{\alpha-1}.$$

Risulta quindi dal calcolo

$$P = p^{\frac{1}{\alpha}}q^{\frac{1}{\alpha}-1}, \qquad Q = p^{1-\frac{1}{\alpha}}q^{2-\frac{1}{\alpha}}.$$

2) La trasformazione di Legendre che porta da F_2 a F_3 ha la forma

$$F_3(p,Q) = F_2(q,P) - pq - PQ,$$

ma notiamo che vale

$$PQ = pq = (qP)^{\alpha}, \qquad pQ = (qP)^{2\alpha-1}.$$

Risulta pertanto

$$F_3(p,Q) = \frac{1-2\alpha}{\alpha}(pQ)^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}.$$

3) Applicando le definizioni si ottiene

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} = p^{\frac{1-\alpha}{2\alpha-1}}Q^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}, \qquad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} = p^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}Q^{\frac{1-\alpha}{2\alpha-1}},$$

da cui risolvendo si ricava

$$Q = p^{1-\frac{1}{\alpha}}q^{2-\frac{1}{\alpha}}, \qquad P = p^{\frac{1}{\alpha}}q^{\frac{1}{\alpha}-1},$$

come si voleva dimostrare.